Cálculo

cecytebc
educación tecnológica

GESTIÓN EDITORIAL

Clemente Mora González
Jefe del Departamento
de Fomento Editorial

Leticia Mejia García
Coordinadora de Fomento Editorial

Ulises Ramírez Hernández
Coordinador de Diseño Gráfico

Miguel Antonio González Vidales
Gestión Administrativa

Mayra Guzmán Gallego
Diseño Gráfico

DIRECCIÓN GENERAL
Av. Panamá #199 Esquina con Buenos Aires.
Col. Cuauhtémoc Sur
Tels. 01 (686) 9 05 56 00 al 08

Correo Electrónico: principal@cecytebc.edu.mx
Página Web: www.cecytebc.edu.mx

CICLO ESCOLAR 2012-1
Prohibida la reproducción total o parcial
de esta obra incluido el diseño tipográfico
y de portada por cualquier medio,
electrónico o mecánico, sin el consentimiento
por escrito del editor.

Nota:

Al personal Docente interesado en enriquecer el contenido del presente documento, le agradeceremos hacernos llegar sus comentarios o aportaciones a los siguientes correos:

acaro@cecytebc.edu.mx
fomentoeditorial@cecytebc.edu.mx

Directorio

José Guadalupe Osuna Millán
Gobernador del Estado
de Baja California

Javier Santillán Pérez
Secretario de Educación
y Bienestar Social del Estado

CECYTE BC

Adrian Flores Ledesma
Director General

Jesús Gómez Espinoza
Director Académico

Ricardo Vargas Ramírez
Director de Administración y Finanzas

Olga Patricia Romero Cázares
Directora de Planeación

Argentina López Bueno
Directora de Vinculación

Ángela Aldana Torres
Jefe del Departamento de Evaluación Académica

MUNICIPIO DE MEXICALI

Cristina de los Ángeles Cardona Ramírez
Directora del Plantel Los Pinos

Laura Gómez Rodríguez
Encargada del Plantel San Felipe

Carlos Zamora Serrano
Director del Plantel Bella Vista

Jesús Ramón Salazar Trillas
Director del Plantel Xochimilco

Rodolfo Rodríguez Guillén
Director del Plantel Compuertas

Abraham Limón Campaña
Director del Plantel Misiones

Francisco Javier Cabanillas García
Director del Plantel Guadalupe Victoria

Román Reynoso Cervantes
Director del Plantel Vicente Guerrero

MUNICIPIO DE TIJUANA

Martha Xóchitl López Félix
Directora del Plantel El Florido

María de los Ángeles Martínez Villegas
Directora del Plantel Las Águilas

Amelia Vélez Márquez
Directora del Plantel Villa del Sol

Bertha Alicia Sandoval Franco
Directora del Plantel Cachanilla

Rigoberto Gerónimo González Ramos
Director del Plantel Zona Río

Jorge Ernesto Torres Moreno
Director del Plantel El Niño

Joel Chacón Rodríguez
Director del Plantel El Pacífico

Efraín Castillo Sarabia
Director del Plantel Playas de Tijuana

Benito Andrés Chagoya Mortera
Director del Plantel Altiplano

Juan Martín Alcibia Martínez
Director del Plantel La Presa

MUNICIPIO DE ENSENADA

Alejandro Mungarro Jacinto
Director del Plantel Ensenada

Emilio Rios Macias
Director del Plantel San Quintín

MUNICIPIO DE ROSARITO

Manuel Ignacio Cota Meza
Director del Plantel Primo Tapia

Héctor Rafael Castillo Barba
Director del Plantel Rosarito Bicentenario

MUNICIPIO DE TECATE

Christopher Díaz Rivera
Encargado del Plantel Tecate

MENSAJE DEL GOBERNADOR DEL ESTADO

Jóvenes Estudiantes de CECYTE BC:

La educación es un valuarte que deben apreciar durante su estancia en el Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Baja California, dado la formación y calidad educativa que les ofrece la Institución y sus maestros.

Por ello, asuman el compromiso que el Gobierno del Estado hace para brindarles educación media superior, a fin de que en lo futuro tengan mejores satisfacciones de vida, y se conviertan en impulsores y promotores del crecimiento exitoso, con la visión que tiene nuestra entidad en el plano nacional.

Esta administración tiene como objetivo crear espacios y condiciones apropiadas para que en un futuro inmediato, el campo laboral tenga profesionistas técnicos de acuerdo al perfil de la industria que cada día arriba a nuestra entidad; por lo que los invito a ser mejores en sus estudios, en su familia y en su comunidad.

En ustedes se deposita la semilla del esfuerzo y dedicación que caracteriza a los bajacalifonianos. Son el estandarte generacional que habrá de marcar la pauta de nuestro desarrollo.Como Gobierno del Estado, compartimos el reto de ser formadores de los futuros profesionistas técnicos que saldrán del CECYTE BC.

Unamos esfuerzos, Gobierno, Sociedad, Maestros y Alumnos, para brindar y recibir una mejor educación en Baja California, ser punta de desarrollo humano, crecimiento industrial y económico, y factor importante del progreso de México.

José Guadalupe Osuna Millán
Gobernador del Estado
de Baja California

MENSAJE DEL SECRETARIO DE EDUCACIÓN

Alumno de CECYTE BC:

La educación es una herramienta que aumenta tus oportunidades de desarrollo personal, y permite ampliar tu horizonte de posibilidades de progreso económico y social.

Bajo esa perspectiva, el Gobierno del Estado de Baja California asume con responsabilidad su compromiso con los jóvenes en la tarea de crear espacios educativos en el nivel medio superior, y ofrecerles programas de estudios tecnológicos que les permitan integrarse con competencia a fuentes de trabajo y/o continuar estudios superiores.

El Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Baja California, es un ejemplo de lo anterior. En las escuelas de esta Institución, los estudiantes pueden encontrar el camino de la superación, y el apoyo para alcanzar las metas que visualizan para forjar su futuro.

Entre esos apoyos se encuentran la publicación y entrega de este material educativo, que el CECYTE BC distribuye, con el objetivo de que lo utilices en beneficio de tus estudios.

La tarea que han desarrollado maestros, alumnos y autoridades aducativas en torno a CECYTE BC, han convertido a esta Institución en un modelo para la formación de generaciones de profesionistas técnicos que demanda el sector productivo que se asienta en la región.

Además de eso, el Colegio se ha destacado por alentar el acercamiento de los padres de familia con la escuela, como una acción tendiente a fortalecer los vínculos que deben existir entre ellos, los docentes y administrativos en el proceso educativo, por ser esta, una responsabilidad compartida.

Por todo esto, te felicito por realizar tus estudios en un plantel del CECYTE BC. Te exhorto a valorar este esfuerzo que hace la sociedad a través de la Administración Estatal, y a que utilices con pertinencia los materiales que se te otorgan para apoyar tu formación profesional.

Javier Santillán Pérez
Secretario de Educación y Bienestar Social

PRESENTACIÓN

El libro que tienes en tus manos representa un importante esfuerzo del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Baja California, que a través de sus academias de profesores te proporciona material de calidad para el estudio de las distintas asignaturas que cursarás en tu preparación como Bachiller Técnico.

Los contenidos corresponden a los programas establecidos para cada una de las asignaturas de acuerdo a la reforma integral de la educación media superior, y enriquecidos por las competencias comunes del Sistema Nacional de Bachillerato.

Este ejemplar, encierra conocimientos, aprendizaje, análisis y habilidades que deberás de poner en práctica en tu vida diaria, convertida en una acción educativa más, que el Colegio te ofrece para obtener una mejor formación académica.

Te invitamos a que valores y obtengas el mayor provecho a esta obra, que fue diseñada especialmente para lo más preciado del Colegio: ***sus Alumnos*****.**

Atentamente

Adrian Flores Ledesma
DIRECTOR GENERAL DEL CECYTE BC

Agradecimiento

Un especial agradecimiento a los Docentes y Administrativos de CECYTE BC, que colaboraron e hicieron posible la edición de estas Guías de Aprendizaje Básicas y Material Didáctico.

El Colegio

SEGUNDO SEMESTRE

• MANUAL DE QUÍMICA II •
Mario Báez Vázquez
ASESOR ACADÉMICO DEL DIRECTOR GENERAL DEL CECYTEBC

• GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA •
Andrés Sarabia Ley
COORDINADOR DE FORMACIÓN PROPEDÉUTICA, D.G.
Andrés Aguilar Mezta
DOCENTE DEL PLANTEL XOCHIMILCO

• INGLÉS 2 •
Mauro Alberto Ochoa Solano
Alonso Palominos Tapia
Bertha Alicia Canceco Jaime
Alejandra Agúndez
DOCENTES DEL PLANTEL ENSENADA

• QUÍMICA 2 •
Saúl Torres Acuña
Agustín Valle Ruelas
DOCENTES DEL PLANTEL XOCHIMILCO

• LECTURA, EXPRESIÓN ORAL Y ESCRITA 2 •
María Guadalupe Valdivia Martínez
DOCENTE DEL PLANTEL COMPUERTAS
María Elena Padilla Godoy
COORDINADORA DE FORMACIÓN VALORAL, D.G.
María Trinidad Salas Leyva
CAPTURISTA DEL DEPARTAMENTO DE DOCENCIA, D.G.
Lina Rodríguez Escárpita
ENCARGADA DEL GRUPO OVIEDO MOTA

CUARTO SEMESTRE

• CÁLCULO •
Silvia Elisa Inzunza Ornelas
Manuel Norberto Quiroz Ortega
Javier Iribe Mendoza
María Del Carmen Equihua Quiñonez
Alvaro Soto Escalante
María Guadalupe Bañuelos Cisneros
DOCENTES DEL PLANTEL BELLAVISTA

• INGLÉS 4 •
Adriana Cera Morales
DOCENTE DEL GRUPO PORTALES
Verónica Murillo Esquivias
DOCENTE DEL PLANTEL COMPUERTAS
Manuel Arvizu Ruíz
Joaquín Alberto Pineda Martínez
Lina Roxana Cárdenas Meza
Juan Olmeda González
Juliana Camacho Camacho
DOCENTES DEL PLANTEL BELLAVISTA

• FÍSICA I •
Andrés Sarabia Ley
COORDINADOR DE FORMACIÓN PROPEDÉUTICA, D.G.
Juan Francisco Cuevas Negrete
Silvia Elisa Inzunza Ornelas
Manuel Norberto Quiroz Ortega
Javier Iribe Mendoza
María Del Carmen Equihua Quiñonez
Alvaro Soto Escalante
María Guadalupe Bañuelos Cisneros
DOCENTES DEL PLANTEL BELLAVISTA

• ECOLOGÍA •
Aidé Aracely Pedraza Mendoza
Clara Angélica Rodríguez Sánchez
DOCENTES DEL PLANTEL COMPUERTAS
Gloria Mosqueda Contreras
Sulma Loreto Lagarda Lagarda
Petra Cantoral Gómez
Eva Pérez Vargas
DOCENTES DEL PLANTEL BELLAVISTA

SEXTO SEMESTRE

• MATEMÁTICAS APLICADA •
Manuel Norberto Quiroz Ortega
Silvia Elisa Inzunza Ornelas
DOCENTES DEL PLANTEL BELLAVISTA
Eloísa Morales Collín
Ismael Castillo Ortíz
DOCENTES DEL PLANTEL COMPUERTAS

• BIOQUÍMICA •
José Manuel Soto
DOCENTE DEL GRUPO PORTALES
Aidé Araceli Pedraza Mendoza
DOCENTE DEL PLANTEL COMPUERTAS
Alejandra Machuca
Cristina Félix
DOCENTES DEL PLANTEL MISIONES
Enid Quezada Matus
Sergio Alberto Seym Guzmán
DOCENTES DEL GRUPO CENTENARIO

COORDINACIÓN Y REVISIÓN ACADÉMICA

Alberto Caro Espino
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE DOCENCIA
Denisse Samaniego Apodaca
RESPONSABLE DE FORMACIÓN PROFESIONAL

ÍNDICE

UNIDAD 1. FUNCIONES

1.1 Antecedentes históricos del cálculo…… 17
1.2 Funciones y análisis grafico de funciones…….. 21
1.3 Operaciones con funciones…….. 31

UNIDAD 2. LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

2.1 Notación intuitiva de límite…… 39
2.1.1 Propiedades de los límites…… 46
2.2 Forma Indeterminada…… 52
2.2.1 Limite en el infinito…… 59
2.3. Teorema de continuidad de una función…… 64
2.3.1 Condiciones de continuidad…… 65

UNIDAD 3. DERIVACIÓN DE FUNCIONES

3.1. La derivada…… 78
3.2. Regla general para la derivación (regla de los cuatro pasos)…… 78
3.3. Regla de la cadena …… 83
3.4. Reglas o formulas de derivación para las funciones trigonométricas…… 88
3.5. Reglas o formulas de derivación para las funciones trigonométricas inversas…… 91
3.6. Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas…… 94

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

4.1 Máximos y mínimos de una función…… 99
4.1.1 Números críticos de una función…… 102
4.1.2 Criterio de la primera derivada…… 103
4.1.3 Punto de inflexión…… 106
4.2 Problemas de Optimización…… 115
4.3 Problemas de razón de cambio relacionado…… 128

BIBLIOGRAFÍA…… 137

UNIDAD 1 FUNCIONES

RESULTADOS DE APRENDIZAJE:

El alumno comprenderá los antecedentes históricos del cálculo, sus funciones y análisis grafico de las funciones así como las operaciones con funciones para aplicarlas en el campo cotidiano.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR:

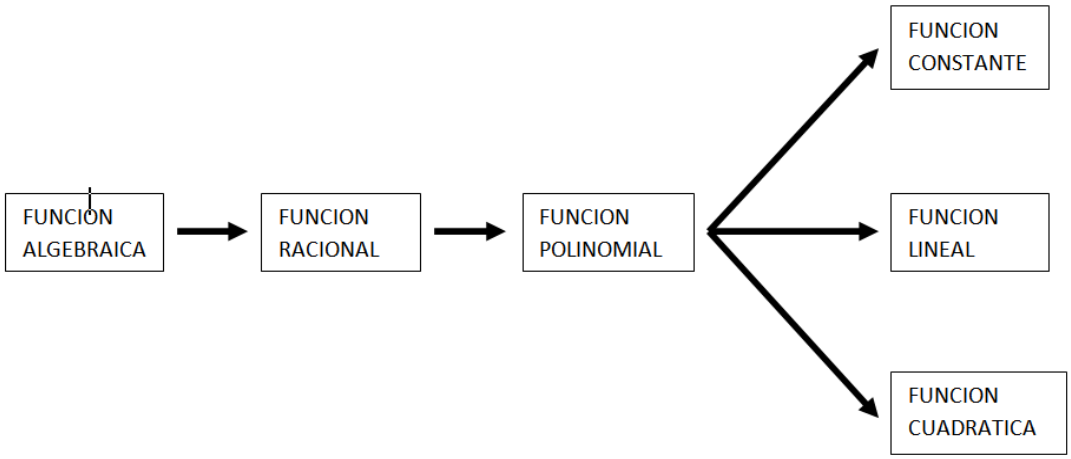
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.(Atributo: 4.1)
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. (Atributos: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.6)
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. (Atributos: 6.1 y 6.3)
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. (Atributos: 7.1)
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. (Atributos: 8.1, 8.2 y 8.3)

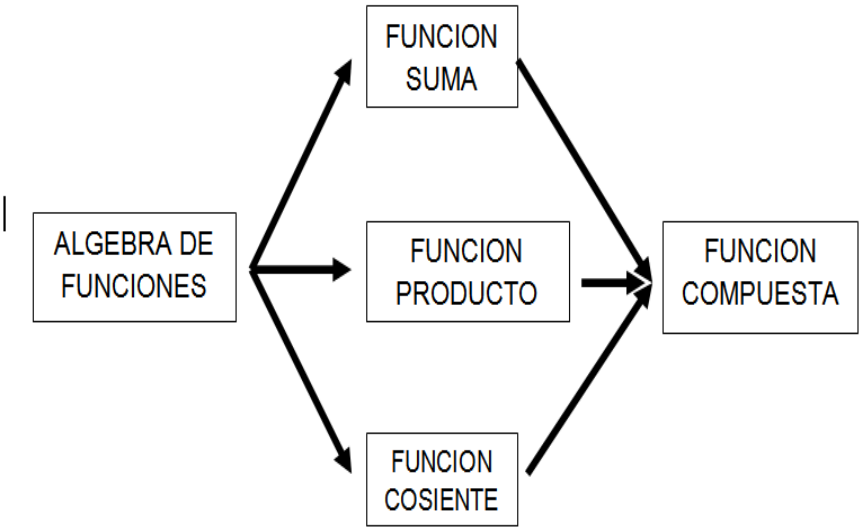
OBJETIVOS ESPECIFICOS

Al terminar de estudiar este módulo, el alumno:

1. Construirá la gráfica de la función dada.
2. Determinará el dominio y el contradominio de una relación dada.
3. Determinará las funciones suma, producto y cociente, dadas dos funciones y sus respectivos dominios.
4. Obtendrá la función compuesta de dos funciones dadas.
5. Determinará el dominio de una función compuesta.

RESUMEN ESQUEMATICO.





1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL CÁLCULO.

Introducción

El Cálculo constituye una de las grandes conquistas intelectuales de la humanidad. Una vez construido, la historia de la matemática ya no fue igual: la geometría, el álgebra y la aritmética, la trigonometría, se colocaron en una nueva perspectiva teórica. Detrás de cualquier invento, descubrimiento o nueva teoría, existe, indudablemente, la evolución de ideas que hacen posible su nacimiento. Es muy interesante prestar atención a los de conocimientos que se acumulan, desarrollan y evolucionan a través de los años para dar lugar, en algún momento en particular y a través de alguna persona en especial, al nacimiento de una nueva idea, de una nueva teoría, que seguramente se va a convertir en un descubrimiento importante para el estado actual de la ciencia y, por lo tanto merece el reconocimiento. El Cálculo cristaliza conceptos y métodos que la humanidad estuvo tratando de dominar por más de veinte siglos. Una larga lista de personas trabajaron con los métodos "infinitesimales" pero hubo que esperar hasta el siglo XVII para tener la madurez social, científica y matemática que permitiría construir el Cálculo que utilizamos en nuestros días.

Sus aplicaciones son difíciles de cuantificar porque toda la matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido su influencia; y las diferentes partes del andamiaje matemático interactúan constantemente con las ciencias naturales y la tecnología moderna.

Newton y Leibniz son considerados los inventores del cálculo pero representan un eslabón en una larga cadena iniciada muchos siglos antes. Fueron ellos quienes dieron a los procedimientos infinitesimales de sus antecesores inmediatos, Barrow y Fermat, la unidad algorítmica y la precisión necesaria como método novedoso y de generalidad suficiente para su desarrollo posterior. Estos desarrollos estuvieron elaborados a partir de visiones de hombres como Torricelli, Cavalieri, y Galileo; o Kepler, Valerio, y Stevin. Los alcances de las operaciones iniciales con infinitesimales que estos hombres lograron, fueron también resultado directo de las contribuciones de Oresme, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente el trabajo de estos últimos estuvo inspirado por problemas matemáticos y filosóficos sugeridos por Aristóteles, Platón, Tales de Mileto, Zenón y Pitágoras. Para tener la perspectiva científica e histórica apropiada, debe reconocerse que una de las contribuciones previas decisivas fue la Geometría Analítica desarrollada independientemente por Descartes y Fermat.

Sin la contribución de éstos y de muchos otros hombres más, el cálculo de Newton y Leibniz seguramente no existiría. Su construcción fue parte importante de la revolución científica que vivió la Europa del siglo XVII. Los nuevos métodos enfatizaron la experiencia empírica y la descripción matemática de nuestra relación con la realidad. La revolución científica supuso una ruptura con las formas de pensar, estudiar y vincularse con la naturaleza que dominaron casi absolutamente en Europa entre los siglos V y XV. Esta ruptura y salto en la historia del conocimiento estuvieron precedidos por las importantes transformaciones que se vivieron durante los siglos XV y XVI con el Renacimiento y la Reforma Protestante. El Cálculo Diferencial e Integral están en el corazón del tipo de conocimiento, cultura y de sociedad de la que, esencialmente, somos parte.

El extraordinario avance registrado por la matemática, la física y la técnica durante los siglos XVIII, XIX y XX, se lo debemos al Cálculo infinitesimal y por eso se puede considerar como una de las joyas de la creación intelectual de la que el hombre puede sentirse orgulloso.

El siglo XVII y la disputa por la creación del cálculo

En sus comienzos el cálculo fue desarrollado para estudiar cuatro problemas científicos y matemáticos:

- Encontrar la tangente a una curva en un punto.
- Encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad.
- Encontrar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
- Dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante. Recíprocamente, dada una fórmula en la que se especifique la aceleración o la velocidad en cualquier instante, encontrar la distancia recorrida por el cuerpo en un período de tiempo conocido.

En parte estos problemas fueron analizados por las mentes más brillantes de este siglo, concluyendo en la obra cumbre del filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz y el físico-matemático inglés Isaac Newton: la creación del cálculo. Se sabe que los dos trabajaron en forma casi simultánea pero sus enfoques son diferentes. Los trabajos de Newton están motivados por sus propias investigaciones físicas (de allí que tratara a las variables como "cantidades que fluyen") mientras que Leibniz conserva un carácter más geométrico y, diferenciándose de su colega, trata a la derivada como un cociente incremental, y no como una velocidad. Leibniz no habla de derivada sino de incrementos infinitamente pequeños, a los que llama diferenciales. Un incremento de x infinitamente pequeño se llama diferencial de x, y se anota dx. Lo mismo ocurre para y (con notación dy). Lo que Newton llamó fluxión, para Leibniz fue un cociente de diferenciales (dy/dx). No resulta difícil imaginar que, al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y ni siquiera de función, los fundamentos de su cálculo infinitesimal son poco rigurosos. Se puede decir que el cálculo de fluxiones de Newton se basa en algunas demostraciones algebraicas poco convincentes, y las diferenciales de Leibniz se presentan como entidades extrañas que, aunque se definen, no se comportan como incrementos. Esta falta de rigor, muy alejada del carácter perfeccionista de la época griega, fue muy usual en la época post-renacentista y duramente criticada. Dos siglos pasaron hasta que los fundamentos del cálculo infinitesimal se solucionaron, y hoy aquel cálculo, potencialmente enriquecido, se muestra como uno de los más profundos hallazgos del razonamiento humano.

Resulta muy interesante la larga y lamentable polémica desatada a raíz de la prioridad en el descubrimiento. Al principio la disputa se realizó en el marco de la cortesía pero al cabo de tres décadas comenzó a ser ofensiva hasta que en el siglo XVIII se convirtieron en mutuas acusaciones de plagio. La polémica se tornó cada vez mayor y finalmente se convirtió en una rivalidad entre los matemáticos británicos y los continentales.

La discusión siguió hasta mucho después de la muerte de los dos grandes protagonistas y, afortunadamente, hoy ha perdido interés y la posteridad ha distribuido equitativamente las glorias. Hoy está claro que ambos descubrieron este cálculo en forma independiente y casi simultánea entre 1670 y 1677, aunque fueron publicados unos cuantos años más tarde.

La difusión de las nuevas ideas fue muy lenta y al principio sus aplicaciones escasas. Los nuevos métodos tuvieron cada vez más éxito y permitieron resolver con facilidad muchos problemas. Los

nuevos logros fueron sometidos a severas críticas, la justificación y las explicaciones lógicas y rigurosas de los procedimientos empleados no se dieron hasta avanzado el siglo XIX, cuando aparecieron otros matemáticos, más preocupados por la presentación final de los métodos que por su utilización en la resolución de problemas concretos.

El siglo XVIII

Durante buena parte del siglo los discípulos de Newton y Leibniz se basaron en sus trabajos para resolver diversos problemas de física, astronomía e ingeniería, lo que les permitió, al mismo tiempo, crear campos nuevos dentro de las matemáticas. Así, los hermanos Bernoulli inventaron el cálculo de variaciones y el matemático francés Monge la geometría descriptiva. Lagrange, también francés, dio un tratamiento completamente analítico de la mecánica, realizó contribuciones al estudio de las ecuaciones diferenciales y la teoría de números, y desarrolló la teoría de grupos. Su contemporáneo La place escribió *Teoría analítica de las probabilidades* (1812) y el clásico *Mecánica celeste* (1799-1825), que le valió el sobrenombre de "el Newton francés".

Sin embargo el gran matemático del siglo fue el suizo Euler, quien aportó ideas fundamentales sobre el cálculo y otras ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. Euler escribió textos sobre cálculo, mecánica y álgebra que se convirtieron en modelos a seguir para otros autores interesados en estas disciplinas. El éxito de Euler y de otros matemáticos para resolver problemas tanto matemáticos como físicos utilizando el cálculo sólo sirvió para acentuar la falta de un desarrollo adecuado y justificado de las ideas básicas del cálculo. La teoría de Newton se basó en la cinemática y las velocidades, la de Leibniz en los infinitésimos, y el tratamiento de Lagrange era completamente algebraica y basada en el concepto de las series infinitas. Todos estos sistemas eran inadecuados en comparación con el modelo lógico de la geometría griega, y este problema no fue resuelto hasta el siglo posterior.

A los matemáticos de fines del siglo el horizonte matemático les parecía obstruido. Se había llegado al estudio de cuestiones muy complicadas a las que nos se les conocía o veía un alcance claro. Los sabios sentían la necesidad de estudiar conceptos nuevos y hallar nuevos procedimientos.

El siglo XIX

Un problema importante fue definir el significado de la palabra función. Euler, Lagrange y el matemático francés Fourier aportaron soluciones, pero fue el matemático alemán Dirichlet quien propuso su definición en los términos actuales. En 1821, un matemático francés, Cauchy, consiguió un enfoque lógico y apropiado del cálculo y se dedicó a dar una definición precisa de "función continua". Basó su visión del cálculo sólo en cantidades finitas y el concepto de límite. Esta solución planteó un nuevo problema, el de la definición lógica de número real. Aunque la definición de cálculo de Cauchy estaba basada en este concepto, no fue él sino el matemático alemán Dedekind quien encontró una definición adecuada para los números reales. Los matemáticos alemanes Cantor y Weierstrass también dieron otras definiciones casi al mismo tiempo.

Además de fortalecer los fundamentos del análisis, nombre dado a partir de entonces a las técnicas del cálculo, se llevaron a cabo importantes avances en esta materia. Gauss, uno de los más importantes matemáticos de la historia, dio una explicación adecuada del concepto de número complejo; estos números formaron un nuevo y completo campo del análisis, desarrollado en los trabajos de Cauchy, Weierstrass y el matemático alemán Riemann. Otro importante avance fue el

estudio de las sumas infinitas de expresiones con funciones trigonométricas, herramientas muy útiles tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas, hecho por Fourier. Cantor estudió los conjuntos infinitos y una aritmética de números infinitos. La teoría de Cantor fue considerada demasiado abstracta y criticada. Encontramos aquí un espíritu crítico en la elaboración de estas nociones tan ricas. Esto constituye un punto de vista muy diferente del que animaba a los matemáticos del siglo anterior. Ya no se trata de construir expresiones ni forjar nuevos métodos de cálculo, sino de analizar conceptos considerados hasta entonces intuitivos.

Gauss desarrolló la geometría no euclidiana pero tuvo miedo de la controversia que pudiera causar su publicación. También en este siglo se pasa del estudio simple de los polinomios al estudio de la estructura de sistemas algebraicos.

Los fundamentos de la matemática fueron completamente transformados durante el siglo XIX, sobre todo por el matemático inglés Boole en su libro *Investigación sobre las leyes del pensamiento* (1854).

Siglo XX y nuestros días

Es importante el aporte realizado por Lebesgue referido a la integración y a la teoría de la medida y las modificaciones y generalizaciones realizadas por matemáticos que lo sucedieron.

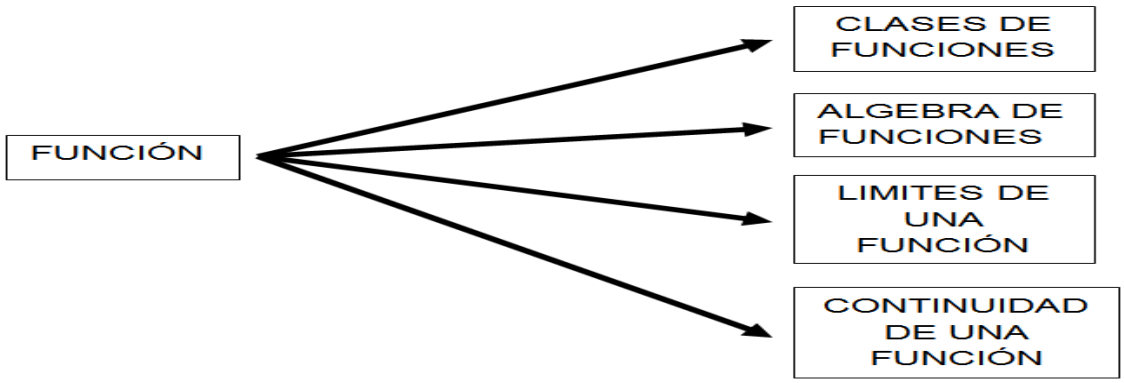
En la Conferencia Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en París en 1900, el matemático alemán David Hilbert, quien contribuyó de forma sustancial en casi todas las ramas de la matemática retomó veintitrés problemas matemáticos que él creía podrían ser las metas de la investigación matemática del siglo que recién comenzaba. Estos problemas fueron el estímulo de una gran parte de los trabajos matemáticos del siglo.

El avance originado por la invención del ordenador o computadora digital programable dio un gran impulso a ciertas ramas de la matemática, como el análisis numérico y las matemáticas finitas, y generó nuevas áreas de investigación matemática como el estudio de los algoritmos. Se convirtió en una poderosa herramienta en campos tan diversos como la teoría de números, las ecuaciones diferenciales y el álgebra abstracta. Además, el ordenador permitió encontrar la solución a varios problemas matemáticos que no se habían podido resolver anteriormente.

El conocimiento matemático del mundo moderno está avanzando más rápido que nunca. Teorías que eran completamente distintas se han reunido para formar teorías más completas y abstractas. Aunque la mayoría de los problemas más importantes han sido resueltos, otros siguen sin solución. Al mismo tiempo aparecen nuevos y estimulantes problemas y aún la matemática más abstracta encuentra aplicación

1.2 FUNCIONES Y ANALISIS GRAFICO DE FUNCIONES.

DIAGRAMA TEMATICO.



I

Diferencia entre relaciones y funciones.

A lo largo de tu vida has relacionado eventos o fenómenos para poder comprender las situaciones, como por ejemplo, cuando se reparten los temas de una exposición en equipo, cuando asignan la posición que tomarán los jugadores de futbol, la distancia que recorre un automóvil al transcurrir el tiempo, la velocidad de un objeto que cae a una altura determinada, etc.; estos eventos suceden debido a que es un mundo cambiante, donde existe un sinfín de magnitudes que varían, como: el tiempo, la posición de la luna, el precio de un artículo, la población, entre otras.

A continuación se definirán los conceptos principales para desarrollar esta asignatura, como el concepto de relación y función, y la diferencia que hay entre ellos.

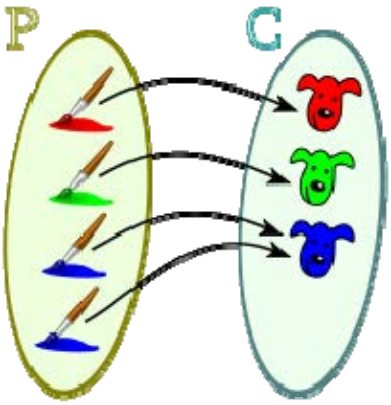
Relaciones.

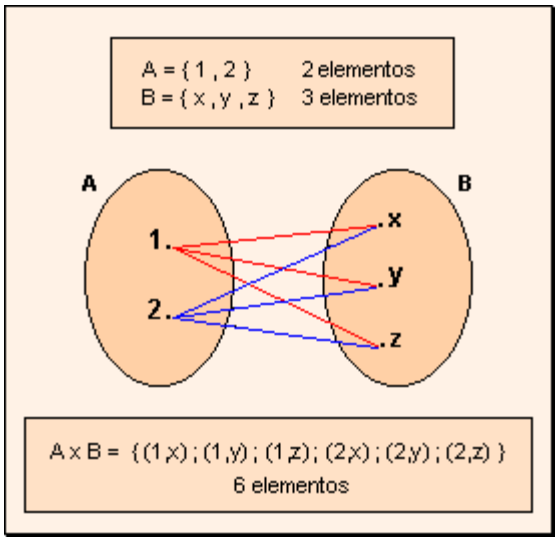
La *relación* entre dos conjuntos es la correspondencia que existe entre los elementos de un primer conjunto llamado dominio, con uno o más elementos de un segundo conjunto llamado contradominio o codominio.

Una relación se puede representar utilizando las siguientes formas:

Mediante un criterio de selección o regla de asociación, el cual se puede presentar en forma de enunciado o una expresión analítica (fórmula), que explicita la relación entre los elementos de los dos conjuntos.

Mediante un diagrama sagital, el cual relaciona los elementos de dos conjuntos por medio de flechas.





Mediante un diagrama de árbol, el cual es una representación gráfica que muestra el desglose progresivo de la relación que existe entre los elementos de dos conjuntos.

Diagrama de árbol de modos de transporte.

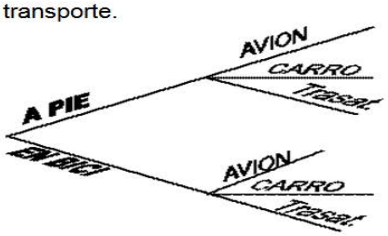
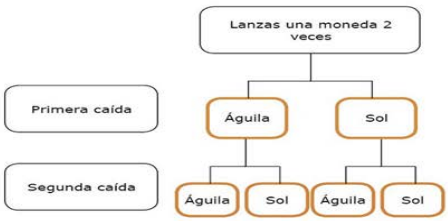
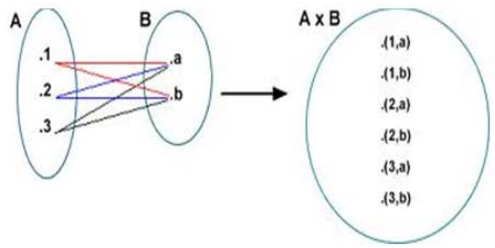


Diagrama de árbol de lanzamiento de dos monedas



Mediante un producto cartesiano, el cual consiste en obtener todos los pares ordenados posibles, cuya primera coordenada es un elemento del primero conjunto y la segunda coordenada es un elemento del segundo conjunto. Si los conjuntos a relacionar son A y B, el producto cartesiano entre ellos se denota como A x B.

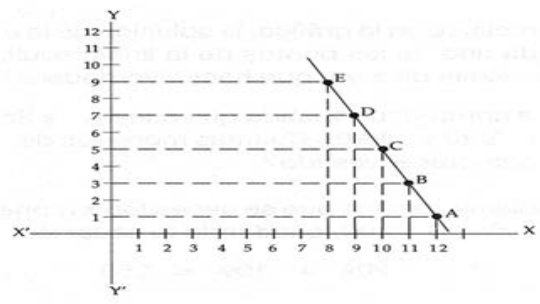
5	(1,5)	(4,5)	(6,5)
3	(1,3)	(4,3)	(6,3)
2	(1,2)	(4,2)	(6,2)
$A \times B$	1	4	6

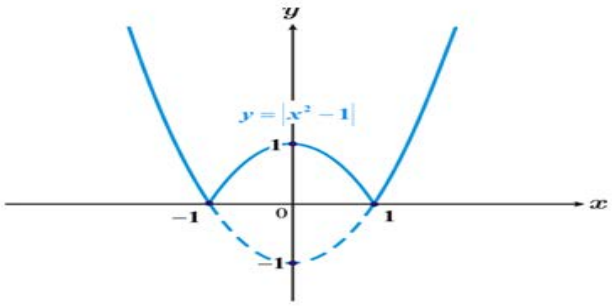


Mediante una tabla, la cual es la organización de los conjuntos en columnas, relacionando así los elementos de los mismos mediante las filas.

	Pan blanco	Galletas saladas
Kcal	261	411
Hidratos	51,5 g	69,2 g
Proteínas	8,47 g	9,4 g
Grasas	1,6 g	10 g
Fibra	3,5 g	3,5 g
Calcio	56 mg	68 mg
Magnesio	25,1 mg	30 mg
Sodio	540 mg	950 mg
Potasio	110 mg	165 mg
Agua	34,9	8,6
Ácido Fólico	23 mg	10 mg

Mediante una gráfica, la cual es una representación de elementos, generalmente numéricos, mediante líneas, superficies o símbolos, para ver la relación que guardan entre sí.





Todas las formas de correspondencia entre dos conjuntos se pueden expresar mediante pares ordenados; si la asociación se da mediante un enunciado, se requiere obtener primero los elementos de cada conjunto para establecer entre ellos la relación y describir los pares ordenados. A continuación se mostrarán ejemplos de las diferentes formas de representar una relación.

Ejemplos de relación mediante un criterio de selección o regla de asociación.

- La relación que guarda los precios de los productos
- La relación que existe entre los kilómetros que recorre un automóvil con el tiempo que transcurre, si éste se mueve a una velocidad de 90 Km/h y tiene que recorrer 177.72 Km para trasladarse de Ciudad Mexicali a Tijuana.
- La relación que existe entre los resultados que se obtienen en el primer lanzamiento de una moneda, con su segundo lanzamiento.
- La relación que existe entre las variables de la ecuación $y = 2x + 3$
- La relación que existe entre el salario de una persona y las horas trabajadas.
- La relación que existe entre la producción total de una fábrica depende del número de operadores que utilice.
- La relación que existe entre la producción de una fabrica depende del número de maquinas que utilice.

Funciones.

Ahora se abordará el concepto de función, la cual es un tipo especial de relación, su definición es:

Una *función (f)* es una relación en la cual a cada elemento del primer conjunto (x), dominio, le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto (y) contradominio.

Dominio y rango.

En el estudio de las relaciones y las funciones, algunos conceptos deben quedar suficientemente claros para ser utilizados correctamente. Entre ellos se encuentran el concepto de dominio y contradomonio o codominio, mencionados anteriormente, los cuales se definen a continuación.

Dominio (Dom): Es el conjunto de elementos a los que se les aplica la relación.

Contradominio o *codominio*: Es el conjunto al que son enviadas, mediante la relación, los elementos del dominio.

Argumentos: Son los elementos del dominio, es decir, los valores que se toman para construir la relación.

Imágenes: Son los elementos del contradominio o codominio que están asociados con algún argumento.

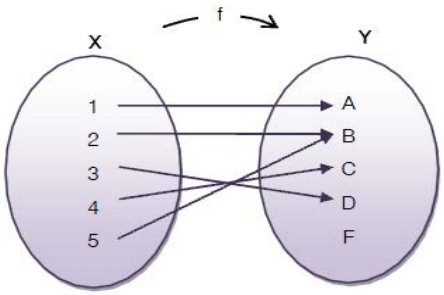
Rango: Es el subconjunto del codominio o contradominio que contiene a todas las imágenes o valores de la relación.

Formas de representar una función.

Una función f que relaciona a un conjunto X con un conjunto Y se denota de la siguiente forma:

$$\mathbf{f : X \rightarrow Y}$$

Se lee: “función f de X a Y”.



Como se observa, a cada elemento del conjunto X le asocia un elemento del conjunto Y mediante la función “f”, por lo tanto, se pueden relacionar de forma individual, de la siguiente forma.

f(1) = A
f(2) = B
f(3) = D
f(4) = C
f(5) = B

En general si se desea relacionar cualquier elemento del dominio con su correspondiente imagen, se denotaría de la siguiente forma:

f(x)=y

Se lee: “f de x es igual a y".

Si se expresa la función como pares ordenados se obtiene:

f(x)={(1, A), (2, B), (3, D), (4, C), (5, B)}

También se puede representar la función en forma de tabla, como se observa a continuación.

x	f(x)
1	A
2	B
3	D
4	C
5	B

Cuando una función está expresada en forma de enunciado se puede escribir su representación analítica o viceversa, como en los siguientes ejemplos:

1. Si el enunciado es: “El cubo de un número más cinco”, entonces su representación analítica es: $f(x) = x^3 + 5$
2. Si el enunciado es: “El triple del cuadrado de un número más el doble del mismo”, entonces su representación analítica es: $g(x) = 3x^2 + 2x$
3. Si la representación analítica es $v(x) = \frac{x}{4} - 7$, el enunciado correspondiente es: “la cuarta parte de un número disminuido en 7 unidades”.
4. Si la representación analítica es: $v(x) = \sqrt{x-1}$ el enunciado correspondiente es: “la raíz cuadrada de la diferencia de un número con uno”.

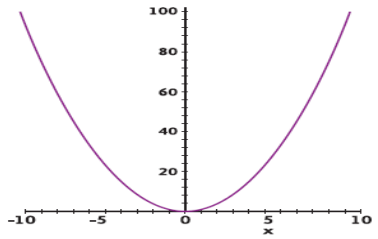
Forma equipos de trabajo y expliquen mediante un cuadro sinóptico, las principales características y diferencias de una función y una relación. Menciona cómo se obtiene el dominio y rango de una función. Una vez concluido el cuadro, compartan puntos de vista con el resto del grupo con la finalidad de complementar sus respuestas y enriquecer sus competencias.

Forma equipos y contesten las siguientes preguntas concernientes a funciones y relaciones.

1.- Observa el siguiente conjunto de pares ordenados {(1,11), (1,21), (1,31), (1,41)}

a) ¿Es función o relación?_____
b) ¿Por qué?_____
c) ¿Cuál es su dominio?_____
d) ¿Cuál es su rango?_____
e) ¿Qué tipo de representación tiene?_____

2.- Dada la siguiente grafica:



a) ¿Es función o relación?_____
b) ¿Por qué?_____
c) ¿Cuál es su dominio?_____

d) ¿Cuál es su rango?_____
e) ¿Qué tipo de representación tiene?
_____

3.- observa la siguiente tabla y resuelve

Nombre	**edad**
Jorge Kim	18
Bastidas Raúl	16
Amador Johnny	19
Ramos Fernando	17
Dávila Luis	19
Palomino Juan	20

a) ¿Es función o relación?_____
b) ¿Por qué?_____
c) ¿Cuál es su dominio?_____
d) ¿Cuál es su rango?_____
e) ¿Qué tipo de representación tiene?_____

4.- de acuerdo a la siguiente expresión algebraica, contesta.

$f(x)= 4x+2$

a) ¿Es función o relación?_____
b) ¿Por qué?_____
c) ¿Cuál es su dominio?_____
d) ¿Cuál es su rango?_____
e) ¿Qué tipo de representación tiene?_____

Al finalizar, de manera aleatoria, seleccionen a alguno (a) de sus compañeros (as) para que vaya anotando las respuestas en el pizarrón, recuerden que pueden participar activamente, complementando en caso de ser necesario, las respuestas.

En asignaturas anteriores te has encontrado con problemas que se tienen que modelar mediante una expresión algebraica y que pueden ser representados con gráficas para poder darles solución, es por ello que el uso de las funciones para construir modelos de la vida real es de suma importancia.
Para hacer un uso adecuado de las funciones debes poseer habilidades para distinguir sus características, así como también para lograr una mejor interpretación.
En virtud de lo anterior, en este tema se analizarán las características más importantes de las funciones, las cuales permiten su clasificación. A continuación se presenta un esquema de la forma en que se clasifican las funciones, para que tener un panorama general de lo que se abordará en esta secuencia.

Funciones Algebraicas.
Son aquellas funciones que están compuestas por términos algebraicos mediante operaciones como la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y extracción de raíces.
Las funciones algebraicas se dividen en polinomiales, racionales e irracionales. A continuación se definirán cada una de ellas.

Funciones Polinomiales.
Estas funciones tienen como forma general la siguiente:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a^1 + a_0$ constantes y n es un número no negativo.
El dominio de las funciones son aquellos valores que pueden sustituirse en la función y ésta es verdadera, por lo tanto el dominio de las funciones polinomiales es el conjunto de los números reales.
Las funciones polinomiales que se tratarán en esta asignatura son hasta de grado cuatro. En seguida se mostrarán la forma general de cada una de ellas y sus nombres.

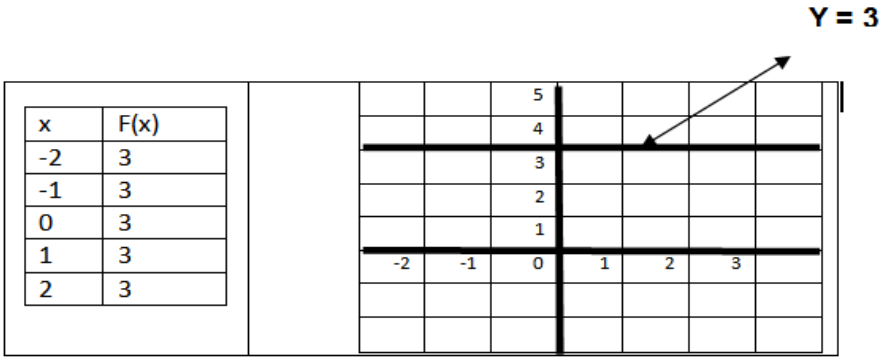
Funciones polinomiales	Función constante	$f(x) = a$	
	Función lineal	$f(x) = mx + b$	con $m \neq 0$
	Función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$	con $a \neq 0$
	Función cúbica	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	con $a \neq 0$
	Función cuártica	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	con $a \neq 0$

Si te darás cuenta, las tres primeras funciones las manejaste en las asignaturas anteriores, pero de igual forma se ejemplificará cada una de ellas en esta secuencia y se retomarán en los bloques posteriores para abordarse con mayor profundidad.

Función constante.
Esta función tiene como imagen el mismo número; su dominio son todos los números reales y a todos ellos se les asocia el mismo elemento, el cual es el rango. Para darle mayor claridad se mostrarán algunos ejemplos

Ejemplo.
Graficar la función f(x)=3, determinar su dominio y rango.
Se utilizará una tabla para poder ubicar las coordenadas de algunos puntos de la función. Si observas en la tabla se eligen los valores de la variable más comunes como – 2, – 1. 0, 1, 2, y a todos ellos al sustituirlos en la función les asigna el 3.
Como su nombre lo dice, la variable “x” es independiente, por lo que se puede elegir cualquier número perteneciente a los números Reales y a todos ellos les asignará el mismo valor, 3; por lo que la gráfica es una recta horizontal que corta al eje Y en 3, como se muestra a continuación en su gráfica.

x	F(x)
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3



Función lineal.

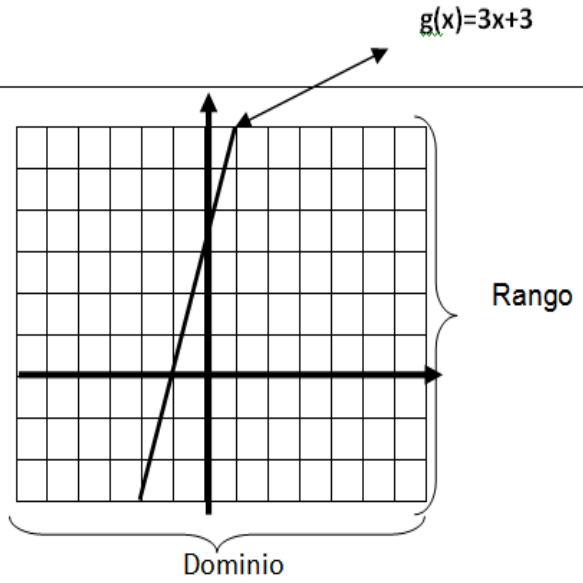
La función lineal es una función algebraica cuyo grado es 1, y se puede visualizar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.
Graficar la función $g(x) = 3x + 3$, determinar su dominio y su rango.

Como recordarás, funciones de este tipo se vieron en Matemáticas 1 y en Matemáticas 3, en ellas aprendiste diferentes la formas de graficarlas. Una función lineal, por medio de una tabla, de las intersecciones de la función con los ejes coordenados, así como también a utilizar los parámetros m (pendiente) y b (ordenada en el origen).
Utilizando una tabla para encontrar los valores se tiene:

x	g(x)=3x+3
-2	-3
-1	0
0	3
1	6
2	9

g(x) = 3x + 3
g(-2)= 3(-2) + 3 = -3
g(-1)= 3(-1) + 3 = 0
g(0) = 3(0) + 3 = 3
g(1)= 3(1) + 3 = 4
g(2)= 3(2) + 3 = 9



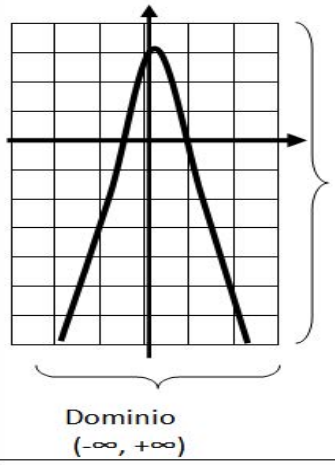
Función cuadrática.

La función cuadrática es de segundo grado y es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, para construir la grafica de una función cuadrática es conveniente construir una tabla de valores, con por lo menos 4 valores, uno para el vértice, dos para los intercepto con el eje X y un curto para el intercepto con el eje Y

Ejemplo: graficar la función $f(x) = -2x^2 + 3$. Determinar su dominio y su rango.

x	$f(x) = -2x^2 +$
-2	-5
-1	1
0	3
1	1
2	-5

$f(x) = -2x^2 + 3$
$f(-2) = -2(-2)^2 + 3 = -5$
$f(-1) = -2(-1)^2 + 3 = 1$
$f(0) = -2(0)^2 + 3 = 3$
$f(1) = -2(1)^2 + 3 = 1$
$f(2) = -2(2)^2 + 3 = 5$



1.3 OPERACIONES CON FUNCIONES.

Con la intención de lograr una mejor descripción y consecuente mejor comprensión del comportamiento de las funciones, se presentan a continuación las más importantes combinaciones de funciones (las funciones pueden combinarse).

Si *f* y *g* son dos funciones cuyos valores funcionales son $f(x)$ y $g(x)$ y sus respectivos dominios representados *Df* y *Dg* se tiene:

Función suma:

s= *f* + *g*= { *(x, s(x)*I*S(x)= f(x) + g(x), x Є D fn Dg.}*

Función producto:

p = f**g* = *{(x, p(x))* I *p(x) = f(x)* g(x), x Є Df n Dg}*

Función cociente:

$$Q = \frac{f}{g} = \{(x, q(x)) \mid q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in Df \cap Dg, g(x) \neq 0\}$$

Ejemplo 1:

Si $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$, determine las funciones suma, producto y cociente con sus respectivos dominios.

Solución:

Función suma:

S(x) = f(x) + g(x), sustituyendo tenemos.

$$S(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2};$$

Como $Df = \{x \in R \mid x \geq 1\}, Dg = \{x \in R \mid x \geq 2\}$ y $Ds = Df \cap Dg$

Tenemos que. $Ds = \{x \in R \mid x \geq 1\}, Dg = \{x \in R \mid x \geq 2\} = \{x \in R \mid x \geq 1\}$

Por lo tanto el dominio de la función *S(x) = f(x) + g(x)* es: $Ds = \{x \in R \mid x \geq 1\}$

Función producto:

*p(x) = f(x) * g(x)*, sustituyendo tenemos.

$$p(x) = \sqrt{x-1} * \sqrt{x+2}$$

$p(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$, para calcular el Dominio de la función p(x);

$D(p) = D(f) \cap D(g)$,

$p(x) = \sqrt{x^2+x-2}$

$D(p) = \{x \in R | x \geq 1\}$

Función cociente:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x-1} * \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} * \sqrt{x+2}}$$

$Dq = Df \cap Dg$

$q(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt{x+2}}$, $Dq = \{x \in R | x \geq 1\}$

Pudiera parecer que falta indicar en el dominio de la función cociente que $x \neq -2$, una observación más detenida de que $x \geq 1$ hará comprender que -2 es un número que ya ha sido excluido del dominio.

Ejemplo 2:

Si $f(x) = [(0,-1),(1,3),(2,8),(3,2)]$
$g(x) = [(2,-5),(3,0),(0,4),(5,7)]$

a) Determine la función f + g = S

$Ds = Df \cap Dg = \{0,1,2,3\} \cap \{0,2,3,5\} = \{0,2,3\}$

Ahora bien, como $S(x) = f(x) + g(x)$, entonces

$S(0) = f(0) + g(0)$

$S(0) = -2 + 4$

$S(0) = 3$ y (0.3) Є S

$S(2) = f(2) + g(2)$

$S(2) = 8 + (-5)$

$S(2) = 3$: (2,3) Є S

$S(2) = f(2) + g(2)$

$S(2) = 8 + (-5)$

$S(2) = 3$: (2,3) Є S

Por lo tanto:

$S = \{(0.3), (2,3), (3.2)\}$

b) Determine la función producto. $p = f * g$

$Dp = Df \cap Dg = \{0,1,2,3\} \cap \{0,2,3,5\} = \{0,2,3\}$

Como

$p(x) = f(x) * g(x)$

$p(0) = (-1) * (4) = 4, entonces\ (0,-4) \in P$

$p(2) = (8) * (-5) = -40, entonces\ (2,-40) \in P$

$P(3) = (2) * (0) = 0. entonces\ (3,0)$

Por lo tanto:

$p = \{(0.-4), (2.-40), (3-0)\}$

c) Determine la función cociente. $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$Dq = Df \cap Dg, g(x) \neq 0$

$q(0) = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}, \quad \left(0, -\frac{1}{4}\right) \in q$

$q(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{8}{-5} = \frac{8}{5}, \quad \left(2, \frac{8}{5}\right) \in q$

$f(3) = \frac{2}{0} \notin R \rightarrow 3 \notin Dg\ por\ lo\ que\ q = \left\{\left(0, -\frac{1}{4}\right), \left(2, -\frac{8}{5}\right)\right\}$

Obtención de la función compuesta.

Si $f(x) = x^3 + 2x - 3$, $f(4) = (4)^3 + (2)(4) - 3$ esto es *f(2)* representa la suma $(x^3 + 2x - 3)$, $f(t) = t^3 + 2t - 3$ pero ¿qué debemos entender por $f(g(x))$? Obviamente que "g(x)" sustituye a x en la expresión $f(x) = x^3 + 2x - 3$, quedando:

$f(g(x)) = (g(x))^3 + 2(G(x)) - 3$, este proceso se sigue para lograr una combinación de dos funciones cuyo resultado es una función conocida como *función compuesta.*

Sean las funciones *f* y *g*, la función compuesta de *f* con *g* es:

$C = \{(x, y) | y = f(g(x))\}$

Ejemplo 3.

Sea $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x + 2$, encuentre:

a) La función compuesta de f con g;
b) La función compuesta de g con f.

Solución:

a) La función compuesta de f con g;
$f(g(x)) = (x + 2)^2 - 1$

b) La función compuesta de g con f.
$g(f(x)) = (x^2 - 1) + 2$

Determinar el dominio de una función compuesta:

Es claro que en ambos ejemplos falta efectuar operaciones indicadas y simplificar.
El dominio de esta función podemos inducirlo en la expresión $f(g(x))$.

Observe que *g(x)* expresa que *x* $\in$ *Dg* y $f(g(x))$ indica que *g(x)* $\in$ *Df* , entonces $Dc = \{x \in Dg, \quad g(x) \in Df\}$, esto en palabras es: el dominio de la función compuesta de *f* con *g* es un conjunto que contiene aquellos elementos del dominio de *g* cuyas imágenes *(g(x))* están en el dominio de *f.*

Ejemplo 4.

Sean $h = \{(0,5),(8,1),(2,9)\}$
$g = \{(2,0),(3,8),(4,7),(6,2),(5,0)\}$, determinar $f = h(g)$

Solución.

Como $Df = \{x | x \in Dg \ y \ g(x) \in Dh\}$, entonces debemos determinar todo par en *g*, cuyo segundo componente aparece como primer componente en *h*, con excepción de (4, 7), el resto cumple con la condición descrita, luego el dominio de *f* es $Df = \{2,3,6,5\}$. Ahora bien , para determinar el elemento asociado en el contradominio, procedemos así.

$x = 2, f(2) = h(g(x)) = h(0) = 5$, entonces (2, 5)
$x = 3, f(3) = h(g(x)) = h(8) = 1, entonces \ (3,1)$
$x = 6, f(6) = h(g(x)) = h(2) = 9, entonces \ (6, \ 9)$
$x = 5, f(5) = h(g(x)) = h(0) = 5, entonces \ (5,5)$

$f = \{(2,5),(3,1),(6,9),(5,5)\}$

Ejemplo 5

Sean $h = \left\{(x,y) \middle| y = \frac{x-1}{2}\right\}, \quad g = \{(x,y) | y = 4x^2 + 2x + 1\}$

Determine la función compuesta de *g* con *h.*

Solución.

Como el problema es encontrar la expresión para *g(h(x))*, entonces dado que

$$h(x) = \frac{x-1}{2}$$
$$g(x) = 4x^2 + 2x + 1$$
$$g(h(x)) = 4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1$$

EJERCICIO DE REFORZAMIENTO 1

Nombre _____

Fecha _____

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada uno de los siguientes reactivos, resuélvelos y entrega un reporte a tu profesor.

A. Grafica cada una de las siguientes relaciones.

1. $f(x) = -|x|$
2. $h(x) = |x-1|+1$
3. $h(x) = |2x-4|-2$
4. $y = x^3$
5. $y = x^4$
6. $y = x^3 - 1$, ¿En que difiere de la grafica $y = x^3$?
7. $a(x) = \sqrt{x}$

B. **Grafica cada una de las siguientes relaciones**:

8. $$f(x) = \begin{cases} x-4, si -2 \leq x \leq 2 \\ x^2-6, si\ 2 < x \leq 4 \end{cases}$$
9. $$f(x) = \begin{cases} 3x-2, & si -3 \leq x < 1 \\ x^2+2x, & si\ 1 < x \leq 3 \end{cases}$$
10. $$f(x) = \begin{cases} x^2, & si\ x < 0 \\ \sqrt{x}, & si\ x > 0 \end{cases}$$

C. Encuentra en cada caso las funciones suma, producto y cociente.

11. $f(x) = x, \quad g(x) = 3 - x$

12. $f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = x^2$

13. $f(x) = 3x^2 - 5x, \quad g(x) = 2x - 1$

14. $f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = \sqrt{x-3}$

15. $f(x) = x^3, \quad g(x) = 2x^2 + 3$

D. En los siguientes problemas determine la función compuesta de f con g

16. $f = \{(-1,1),(0,6),(1,3),(2,4)\}$
$g = \{(-1,2),(0,3),(1,2),(2,0)\}$

17. $f = \{(0,3),(3,6),(-2,1),(2,4)\}$
$g = \{(-3,0),(-1,3),(2,-2),(1,0),(4,-1)\}$

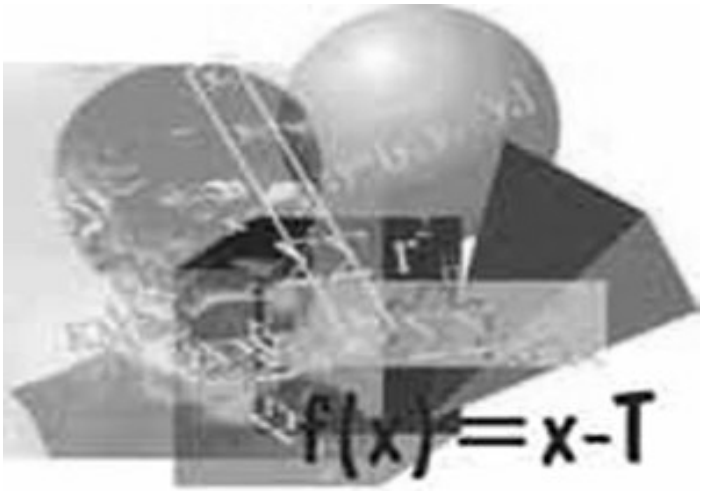
18. $f = \{(2,7),(-1,-3),(0,3),(1,5)\}$
$g = \{(3,2),(-1,-1),(-2,0),(-3,1)\}$

E. En los siguientes problemas determine f(g(x))

19. $f(x) = 4, \quad g(x) = 4x + 4$

20. $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x + 1$

21. $f(x) = 9 - 3x, \quad g(x) = \frac{9-x}{2}$



UNIDAD 2

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

RESULTADOS DE APRENDIZAJE:

El alumno comprenderá la noción intuitiva de limite, así como el cálculo de funciones y continuidad de una función.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR:

9. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.(Atributo: 4.1)
10. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. (Atributos: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.6)
11. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. (Atributos: 6.1 y 6.3)
12. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. (Atributos: 7.1)
13. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. (Atributos: 8.1, 8.2 y 8.3)

2.1. NOTACION INTUITIVA DE LÍMITE.

¿Qué es cálculo?

Cálculo es la matemática del cambio: velocidades y aceleraciones. Cálculo es también la matemática de rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, longitudes de arcos, centroides, curvaturas y otros diversos conceptos que han hecho que los científicos, ingenieros y economistas puedan modelar situaciones de la vida real.

Aunque las matemáticas previas al cálculo también versan sobre velocidades, aceleraciones, rectas tangentes, pendientes, etc., aquí se tiene una diferencia fundamental entre las matemáticas previas y el propio cálculo: las matemáticas previas al cálculo son más estáticas, en tanto que el cálculo es más dinámico.

Algunos ejemplos son:

• Un objeto que viaja con velocidad constante puede modelarse con matemáticas previas al cálculo. Para modelar la velocidad de un objeto en aceleración es necesario el cálculo.

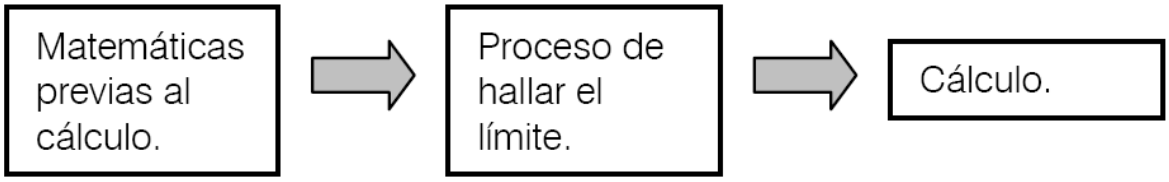
• La pendiente de una recta puede modelarse con matemáticas previas al cálculo. Para modelar la pendiente de una curva es necesario el cálculo.

• Una recta tangente a un círculo puede modelarse con matemáticas previas al cálculo.
Para modelar una recta tangente de una gráfica general es necesario el cálculo.

• El área de un rectángulo puede modelarse con matemáticas previas al cálculo. Para modelar el área debajo de una curva general es necesario el cálculo.

Cada una de estas situaciones comprende la misma estrategia general: el replanteamiento de las matemáticas previas al cálculo a través de la aplicación del proceso de hallar el límite. De este modo, una manera de contestar la pregunta

"¿qué es cálculo?" es: cálculo es una "máquina de hallar límites" que comprende tres etapas. La primera la constituye las matemáticas previas al cálculo; la segunda es el proceso de hallar el límite; y la tercera es un nuevo planteamiento del cálculo, como una derivada o una integral.



Como ves la noción de límite es fundamental para el estudio del cálculo. Las breves descripciones de dos problemas clásicos del cálculo -*el problema de la recta tangente* y *el problema del área*- el primero, se presentará en este curso y el

segundo en tu curso subsecuente de Cálculo II, deben de darte cierta idea de

cómo se usan los límites en esta disciplina.

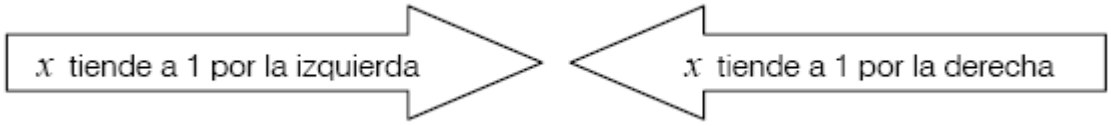
Supongamos que se te pide trazar la gráfica de la función *f* dada por:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}; \quad x \neq 1.$$

Para todos los valores diferentes de $x = 1$, es posible aplicar técnicas estándares

de trazado de curvas. Pero en $x = 1$ no resulta claro que pueda esperarse, debido

que en ese valor la función no está bien definida. Para darnos una idea del comportamiento de la gráfica de *f* cerca de $x = 1$, se pueden utilizar dos conjuntos de valores de *x;* uno que se aproxime a 1desde la izquierda y otro que se acerque a 1 desde la derecha, como se muestra en las tablas:



x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.710	2.970	2.9970	2.9997	?	3.0003	3.003	3.030	3.310

$f(x)$ tiende a 3 ← → $f(x)$ tiende a 3

Cuando se traza la gráfica de la función, parece que la gráfica de *f* es una parábola que tiene una abertura en el punto (1,3), como se muestra en la Fig. 2.1.

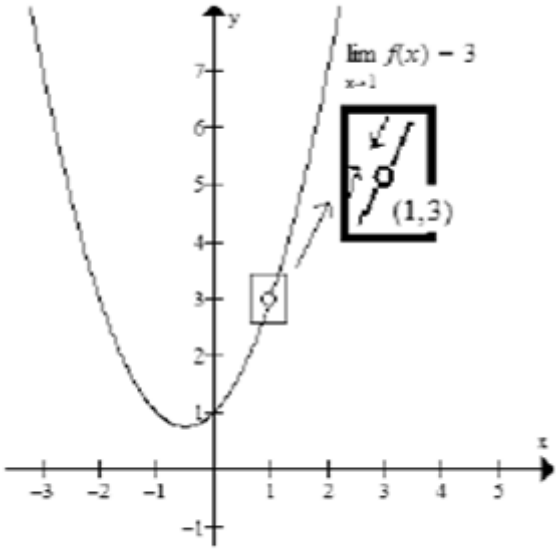


Fig. 2.1 El límite de $f(x)$, cuando x tiende a 1, es 3.

Aunque *x* no puede ser igual a 1, puedes moverte arbitrariamente cerca de 1 por la izquierda como por la derecha y, como resultado, *f* (*x*) se mueve, también de modo arbitrario, cerca de 3. Si utilizas la notación de límites, se puede escribir:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 .$$

Esto se lee como “el límite de *f* (*x*), cuando *x* tiende a 1, es 3” Esta explicación conduce a una descripción intuitiva de límite.

Si f(x) se acerca arbitrariamente a un número L cuando x se aproxima a un número c desde cualquiera de los dos lados, el límite de f(x), cuando x tiende a c, es L. Este límite se escribe como:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Para x ≠ 1 la función puede simplificarse, haciendo una factorización del numerador primeramente y después una división de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{x - 1} = x^2 + x - 1.$$

Como pudiste observar en la figura 2.1 la grafica de la función es la f(x) = x^2 + x + 1, excepto que la grafica de la función dada, tiene un pequeño hueco en el punto que corresponde a x=1, esto debido a que el valor de la función f(x) no existe para dicho valor de x. Cuando se aproxima cada vez más a 1, los valores correspondientes de f(x) se aproximan cada vez más a 3.

Utilizaremos la notación de x→c para indicar que x tiende al valor c, por la izquierda y x→c para expresar que x tiende al valor c por la derecha. De esta manera definiremos los límites unilaterales.

L, es el límite de *f* por la izquierda cuando *x* tiende a *c* por la izquierda y lo representamos como:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

L, es el límite de *f* por la derecha cuando *x* tiende a *c* por la derecha y lo representamos como:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Por lo tanto, si los límites unilaterales tienen un valor común L:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Se dice entonces que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y se escribe como ya lo habíamos determinado en la definición intuitiva de límite:

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

En caso contrario cuando los límites unilaterales no coinciden al mismo valor, se dice que el límite no existe y se representa de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \nexists$$

Usualmente haremos referencia al número L como el límite de f en c, sin embargo

La existencia del límite de una función f no depende de si f está realmente definida en c, sino solamente si f está definida para valores de x cerca de c, debes observar lo siguiente:

Como habrás notado los límites son usados para describir como se comporta una función cuando la variable independiente x se mueve alrededor de ciertos valores.

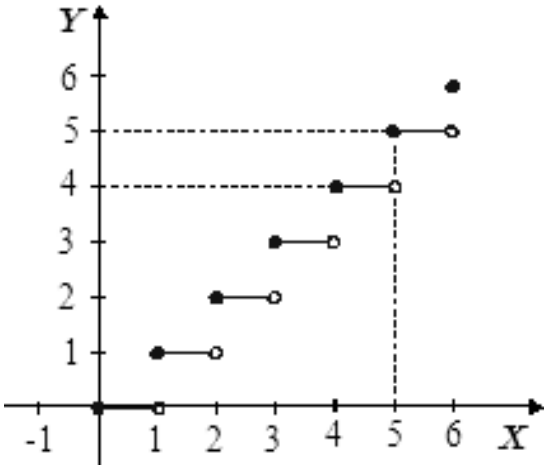
Limites Laterales

Consideremos el siguiente caso:

Encontrar $\lim_{x \to 5} [x]$.

Solución

La gráfica de la función $[x]$ en el intervalo $[0, 6]$ es



Consideremos algunos valores cercanos a $x = 5$:

x	$f(x)$
4.2	4
4.5	4
4.75	4
4.85	4
4.95	4
4.98	4
4.99	4

x	$f(x)$
5	5
5.5	5
5.25	5
5.12	5
5.06	5
5.03	5
5.01	5

Observamos que los valores no se aproximan a un número sino a dos, dependiendo de si nos acercamos por la derecha o por la izquierda al punto $x = 5$. En este caso el límite no existe. De manera simbólica, escribimos:

$$\lim_{x \to 5^-} [x] = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 5^-} [x] = 5.$$

El símbolo $x \to 5^-$ indica que nos acercamos a 5 por valores menores que cinco y decimos que nos acercamos a cinco por la izquierda.

El símbolo $x \to 5^+$ indica que nos acercamos a 5 por valores mayores que cinco y decimos que nos acercamos a cinco por la derecha.

Los valores que obtuvimos son llamados límites laterales de $[x]$.

Si

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L = \lim_{x \to c^+} f(x),$$

entonces

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

y viceversa.

Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 15 & \text{si } -4 \leq x < 5 \\ x & \text{si } 5 \leq x < 9 \end{cases}$$

encontrar $\lim_{x \to 5} f(x)$.

Solución

Calculamos los límites laterales en 5, es decir:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} x^2 - 15 = 5^2 - 15 = 10$$

Y

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} x = 5.$$

Ambos límites laterales existen pero no son iguales entonces $\lim_{x\to 5} f(x)$ no existe.

Utiliza el graficador Evalúa límites laterales para comprobar lo anterior.

2.1.1. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

Teorema: propiedades de los límites:

Sean k y c números reales y n un entero positivo, y f y g funciones con los límites siguientes: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = K$.

1. Límite de una constante por una función o múltiplo escalar:

$$\lim_{x\to c} kf(x) = kL.$$

2. Suma o diferencia: $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = L \pm K.$

3. Producto: $\lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot K.$

4. Cociente: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0.$

5. Raíz: $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, siempre y cuando n sea un entero positivo impar, o bien, n sea un entero positivo par y $\lim_{x\to c} f(x) > 0.$

Ejemplos

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$ del ejemplo introductorio de la página y la función $g(x) = \sqrt{x^2 + 15}$.

Calcular $\lim_{x\to 1}(f+g)(x)$, $\lim_{x\to 1}(f-g)(x)$, $\lim_{x\to 1}(fg)(x)$ y $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Solución

Recordemos primero que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 6.$$

Calculamos

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\sqrt{x^2 + 15} = \sqrt{16} = 4.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 1}(f+g)(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x) = 6 + 4 = 10$$

$$\lim_{x\to 1}(f-g)(x) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x) = 6 - 4 = 2$$

$$\lim_{x\to 1}(fg)(x) = \lim_{x\to 1} f(x) \lim_{x\to 1} g(x) = 6 \times 4 = 24$$

Como

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 4 \neq 0$$

entonces

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 2x$

Calcula $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(f+g)(x)$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(f-g)(x)$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(fg)(x)$ y $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Solución

Calculamos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2x = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Entonces

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(f+g)(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = 1+\pi$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(f-g)(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = 1-\pi$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(fg)(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = 1(\pi) = \pi$$

Como

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \pi \neq 0$$

entonces :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x)} = \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+x-2}=?$$

En este caso, el límite del cociente no puede escribirse inmediatamente como el cociente de límites porque $\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)=0$; sin embargo, podemos simplificar primero la función para poder obtenerlo:

Del tema factorización,

debes recordar lo siguiente:

1. Factor común.
2. La diferencia de cuadrados perfectos.
3. Trinomios cuadrados perfectos.
4. Trinomios cuadrados imperfectos.
5. Racionalización y graficación de funciones

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}=\frac{\lim_{x\to 1}1}{\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}2}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$

Nombre _____

Fecha _____

$$\lim_{x \to 0} (-7) =$$

$$\lim_{x \to 1} 8 =$$

$$\lim_{x \to -3} 5 =$$

$$\lim_{x \to 0} x =$$

$$\lim_{x \to 1} x =$$

$$\lim_{x \to 0} 11x =$$

$$\lim_{x \to -3} 6x =$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} 5x =$$

$$\lim_{x \to 2} (2x + 5)$$

$$\lim_{x \to -2} (5x - 2)$$

Nombre _____

Fecha _____

$$\lim_{x\to 0}(7x^2-5x)$$

$$\lim_{x\to 0}(4x^2-7x+10)$$

$$\lim_{x\to 0}(x-7)(x+4)$$

$$\lim_{x\to 1}(5x+1)(x-5)$$

2.2. FORMA IDETERMINADA.

Del tipo 0 / 0

Usando factorización

En el primer ejemplo de esta página encontramos que:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4.$$

Veamos otra manera de encontrar este límite.

Como el numerador y el denominador son polinomios, entonces son funciones continuas, por lo que sus límites pueden calcularse evaluando, es decir:

$$\lim_{x \to -2} x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to -2} x + 2 = -2 + 2 = 0$$

Puesto que el límite del denominador es cero, no podemos evaluar el límite del cociente como el cociente de los límites, sin embargo, el límite puede calcularse observando que

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = x - 2 \qquad \text{si } x \neq -2$$

de donde:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} x - 2 = -2 - 2 = -4$$

El resultado anterior es consecuencia de la siguiente propiedad:

> Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ y $\lim_{x\to c} g(x) = L$
>
> entonces
>
> $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L.$$

Ejemplos

Calcular $\lim_{x\to 9} \dfrac{x^3 - 17x^2 + 72x}{x - 9}$.

Solución

Observamos que:

$$\lim_{x\to 9} x^3 - 17x^2 + 72x = 9^3 - 17(9)^2 + 72(9) = 9(81 - 153 + 72) = 0$$

$$\lim_{x\to 9} x - 9 = 9 - 9 = 0$$

por lo que no podemos calcular el límite buscado como el cociente de los límites.

Entonces lo hacemos factorizando:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 9} \frac{x^3 - 17x^2 + 72x}{x - 9} &= \lim_{x\to 9} \frac{x\left(x^2 - 17x + 72\right)}{x - 9} \\ &= \lim_{x\to 9} \frac{x(x-8)(x-9)}{x-9} \\ &= \lim_{x\to 9} x(x-8) \\ &= 9(9-8) \\ &= 9\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{x\to 9} \dfrac{x^3 - 17x^2 + 72x}{x - 9} = 9$.

Utiliza la graficadora y evalúa los siguientes límites para comprobar lo anterior. Escribe (x^3-17*x^2+72*x)/(x-9) en f. y 9 en x0. Utiliza el zoom si hace falta

Calcular $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$.

Solución

Observamos que:

$$\lim_{h\to 0}(2+h)^3-8=2^3-8=0$$

$$\lim_{h\to 0}h=0$$

por lo que el límite no puede calcularse como el cociente de los límites.

Entonces desarrollamos el numerador para factorizar:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{12h+6h^2+h^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h\left(12+6h+h^2\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}12+6h+h^2\\ &= 12\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}=12$.

Calcular $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+x^2-21x-45}{x^3+7x^2+15x+9}$.

Solución

Observamos que:

$$\lim_{x\to -3} x^3 + x^2 - 21x - 45 = (-3)^3 + (-3)^2 - 21(-3) - 45 = 0$$

$$\lim_{x\to -3} x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = (-3)^3 + 7(-3)^2 + 15(-3) + 9 = 0$$

por lo que el límite no puede calcularse como el cociente de los límites.

Entonces factorizamos el numerador y el denominador

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^3 + x^2 - 21x - 45}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9} = \lim_{x\to -3} \frac{(x^2 - 2x - 15)(x + 3)}{(x^2 + 4x + 3)(x + 3)}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 4x + 3}$$

Observamos que

$$\lim_{x\to -3} x^2 - 2x - 15 = (-3)^2 - 2(-3) - 15 = 0$$

$$\lim_{x\to -3} x^2 + 4x + 3 = (-3)^2 + 4(-3) + 3 = 0$$

factorizando nuevamente

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 4x + 3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x + 3)(x - 5)}{(x + 3)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x - 5}{x + 1}$$

$$= \frac{-3 - 5}{-3 + 1}$$

$$= 4$$

por tanto, $\lim_{x\to -3} \frac{x^3 + x^2 - 21x - 45}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9} = 4$.

Ejercicios

Nombre _____

Fecha _____

Calcula el límite de las siguientes funciones utilizando factorización si es necesario.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x}$

2. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x - 18}{x - 3}$

3. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

4. $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$

5. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 9x + 14}{x + 2}$

6. $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{x^2 - 6x - 27}$

Ejercicios

Nombre _____

Fecha _____

7. $\lim_{x \to 4} \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{x - 4}$

8. $\lim_{x \to 4} \dfrac{4x^2 + 27x - 7}{x + 7}$

9. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{(x - 2)(x - 11)}$

10. $\lim_{x \to -7} \dfrac{(x + 7)(x - 3)}{x^2 - 49}$

11. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 8x + 15}$

12. $\lim_{x \to 6} \dfrac{x^2 + 3x - 54}{x^2 - 36}$

Ejercicios

Nombre _____

Fecha _____

13. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 + 4x - 32}{x^2 - 6x + 8}$

14. $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^2 - x - 30}{x^2 + 8x + 15}$

15. $\lim_{x \to 5} \dfrac{2x^2 - 14x + 20}{3x^2 - 14x - 5}$

16. $\lim_{x \to -\frac{5}{4}} \dfrac{16x^2 - 25}{4x + 5}$

17. $\lim_{x \to \frac{9}{7}} \dfrac{9 - 7x}{81 - 49x^2}$

18. $\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \dfrac{8x + 12}{64x^2 - 144}$

2.2.1 LIMITE EN EL INFINITO.

Al momento de calcular los límites para una función en el infinito se tienen que aplicar ciertos criterios en la función, los cuales son los siguientes:

Dividimos cada término del numerador y del denominador por la potencia más grande de *x* que aparezca en la función.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}$$

Dividimos cada termino del numerador y denominador en x^4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{5x^3}{x^4}+\frac{4x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{6}{x^4}}{\frac{6x^4}{x^4}+\frac{8x^3}{x^4}-\frac{4x^2}{x^4}+\frac{8x}{x^4}+\frac{10}{x^4}}$$

Hacemos la división de las x

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{6}{x^4}}{6+\frac{8}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\frac{10}{x^4}}$$

Y aplicamos el teorema de $\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0$ m entonces todos los términos divididos entre x se harán 0;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\cancelto{0}{\frac{5}{x}}+\cancelto{0}{\frac{4}{x^2}}-\cancelto{0}{\frac{3}{x^3}}+\cancelto{0}{\frac{6}{x^4}}}{6+\cancelto{0}{\frac{8}{x}}-\cancelto{0}{\frac{4}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{8}{x^3}}+\cancelto{0}{\frac{10}{x^4}}}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x^2-3x+6}{6x^4+8x^3-4x^2+8x+10}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ejercicios

Nombre _____

Fecha _____

1.- $\lim_{t\to\infty} \dfrac{2t^3 - 3t^2 + 4}{5t - t^2 - 7t^3}$

2.- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{7 - 3x^2}{5x + 9x^2}$

3.- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6x + 2}{3x + 5}$

4.- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{8x^3 - 3x^2 + 1}{4x^3 + 5x - 7}$

5.- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{4 + x - 5x^2}$

6.- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4x + 2}{8x - 3}$

Nombre _____

Fecha _____

Comprueba los siguientes límites

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-5x^2+3}{-2x^3+4x-7}=-3$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-6x^2-2}{2x^5-x^3+3x}=0$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3}{2x^3+3x^2}=1$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{3h+2xh^2+x^2h^3}{4-3xh-2x^3h^3}=\frac{1}{2x}$

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}=1$

f) $\lim_{x\to\infty}\frac{3+\cos x}{x}=0$

g) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=-1$

h) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{x^2+5x+6}=5$

Ejercicios

Nombre _____

Fecha _____

Utilizando los teoremas de indeterminación contesta los siguientes ejercicios.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9}{x^3+27}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+7}{9x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+6}{x^2+x-5}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-5x+1}{-3x+6}$$

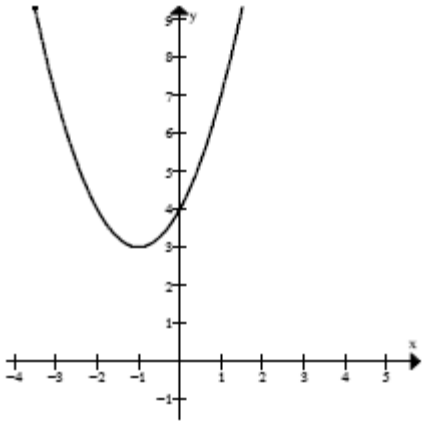
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-12x^2}{4x^2+8x-5}$$

2.3 TEOREMA DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCION.

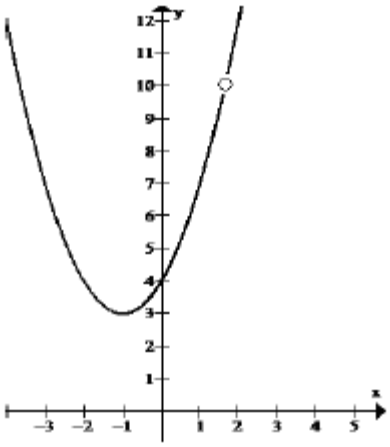
En nuestra vida cotidiana se nos presentan obstáculos que nos impiden continuar algún proyecto, y debemos de buscar opciones de solución para continuar con el proyecto. Por ejemplo, cuando vas caminando y encuentras algún obstáculo, como un charco de agua, es necesario brincarlo para poder seguir tu camino. En este ejemplo nos damos cuenta que el salto que diste fue un impedimento para que tu caminar se diera de manera continua, en otras palabras, te diste cuenta que para continuar la marcha tuviste que despegar los pies del suelo.

En la grafica se muestra también se presenta el mismo caso: es decir, en ocasiones es necesario despegar el lápiz del papel para poder dibujarla. En el caso de que la grafica de una función la podamos realizar sin despegar el lápiz del papel, decimos que la función es una *función continua.* En el caso contrario, es decir, cuando despegamos el lápiz del papel para poder dibujar la grafica diremos que la función es discontinua.

Observa la siguiente figura para obtener las definiciones de continuidad y discontinuidad de una manera intuitiva.



En forma intuitiva se puede decir que la gráfica de esta función puede dibujarse en un trazo ininterrumpido. Concluimos que es una función continua.



La gráfica representada en esta función, presenta un hueco, es decir, hay un trazo interrumpido. Concluimos que es una función discontinua.

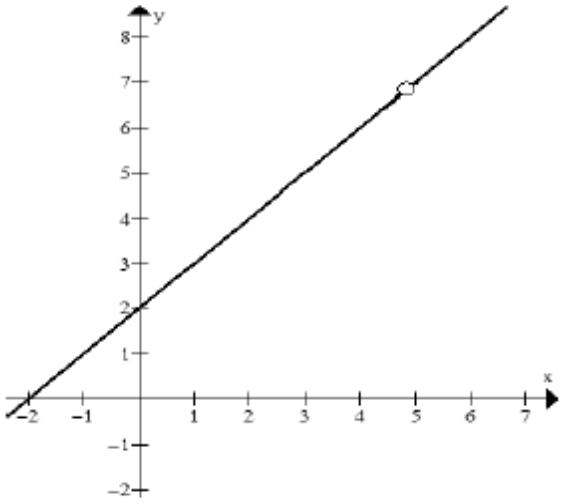
En la siguiente subtema llegaremos, mediante ejemplos de algunas funciones, a establecer las condiciones para que una función sea continua.

2.3.1. CONDICIONES DE CONTINUIDAD.

En estos ejemplos te presentaremos distintas formas de discontinuidad que puede tomar una función.

Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$,

La grafica de la función es;



En esta función *F(x)* no está definida para *X=5*; esto nos dice que hay una ruptura en la grafica en *X=5* concluimos que la función f es discontinua en *X=5* y continua para todos los otros valores de *X* diferentes de 5 tenemos:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 2)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} (x + 2) = 7.$$

Como te darás cuenta el limite existe y es igual a 7; sin embargo, f (5) no existe, es decir, el valor que toma la función en x=5 no existe ya que hace 0 al denominador de la función racional provocando que esta sea indefinida.

Concluimos entonces que el valor del límite es diferente al valor de la función valuada en x=5. Esto es, $\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5).$

Consideraremos ahora la función g:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{cuando } x \neq 2 \\ 12 & \text{cuando } x = 2 \end{cases}$$

Esta función g(x) se compone de dos partes (figura 2.7), la primera parte están definidas para todos los números reales X≠2 excepto para x=2, ya que en ese valor el denominador de la función racional se hace 0, haciendo que esa parte de la función quede indefinida; es precisamente en ese valor que la grafica de la función presenta un hueco. Por otro lado en la segunda parte de g(x), la función toma el valor de un punto con coordenadas (2,12), haciendo que el hueco que existe de la primera parte de la función quede definido en esta segunda parte; es decir, el hueco se rellena. Ya que no hay una ruptura en la grafica de g(x) debemos afirmar entonces que g es una función continua.

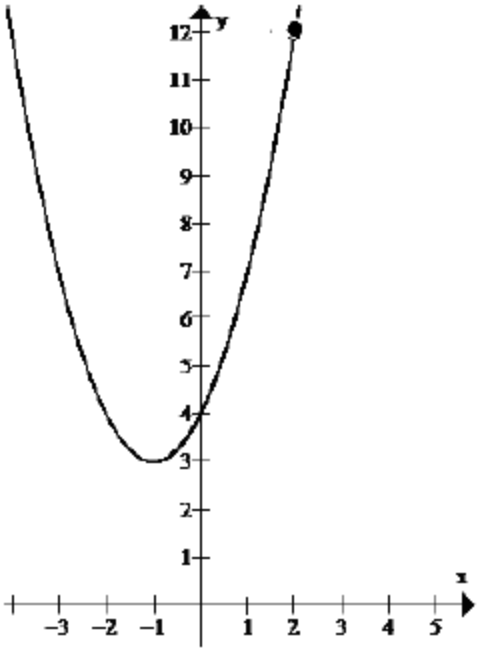


Fig. **2.7** Gráfica de la función $g(x)$.

Nuevamente, si calculamos el límite de esta función g tenemos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12.$$

Si comparamos el valor del límite, es igual al valor que toma la función *g* en *X=2*. Esto es $\lim_{x-2} g(x) = g(2)$. Por tanto la función *g(x)* es continua en *X=2*.

Otro ejemplo es la función presentada en el Ejemplo 7 de este modulo (pag.23),

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|+2 & si\ x \leq 2 \\ -x^2+6x-8 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Su forma es un claro ejemplo de una función discontinua, ya que esta presenta un salto en el valor X=2.

Si recuerdas, el cálculo de los límites son diferentes, tenemos que:

$$\lim_{x-2^-} f(x) = |2-1|+2 = |1|+2 = 1+2 = 3.$$

$$\lim_{x-2^+} f(x) = -(2)^2+6(2)-8 = -4+12-8 = 0.$$

Como estos dos límites son diferentes, tenemos que:

$\lim_{x-2} f(x) = 3$ No es solución.

Por otro lado tenemos que el valor de la función *f(X)* valuada en 2 es igual a 3. Lo anterior nos dice que aun teniendo a una función definida es algún punto, en este caso 2, es una condición necesaria para la continuidad en ese punto, pero no suficiente para asegurar que la continuidad exista ya que el límite no existe en ese mismo punto.

Los ejemplos antes mencionados son suficientes para determinar ahora las condiciones que una función debe cumplir para hablar de continuidad en un punto.

Continuidad en un punto: Sea *f* una función determinada en un intervalo abierto que contiene a *C*.

Decimos que *f* es continua en *C* sí $\lim_{x-c} f(x) = f(c)$.

El significado de esta definición nos asegura tres condiciones:

F(c) está definida. Es decir que exista, que *C* pertenezca al dominio de *F*.

Que el $\lim_{x \to c} f(x)$ exista.

El limite $\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$

Si cualquiera de estas tres condiciones falla, decimos que la función *F* no es continua en el punto *C*, esto es, que es discontinua en *C*.

En pocas palabras, si quieres determinar si una función es continua en un punto dado *C*, tienes que verificar primero si la función está bien definida en *C*, esto lo logra sustituyendo en la función dicho valor para determinar si el resultado es un número real. Luego determinar que el límite de la función valuada en *C* es el mismo.

En pocas palabras, si quieres determinar si una función es continúa en un punto dado *C*, tienes que verificar primero si la función está bien definida en *C*, esto lo logras sustituyendo en la función dicho valor para determinar si el resultado es un número real. Luego determinar que el límite y el de la funcia valuada en *C* es el mismo.

Una función es continua siempre que no se presente cualquiera de los siguientes casos:

Una división por cero, esto en el caso de las funciones racionales.

Si se extrae una raíz de índice par a una cantidad negativa, esto en el caso de las funciones radicales.

Una función por partes es continua, si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de división de los intervalos, por tanto deben coincidir los límites unilaterales.

Esto es, si sustituimos un valor cualquiera a la variable independiente x y no se presenta ninguno de los casos anteriores, la función será continua para ese valor. En caso contrario, la función presentara cualquiera de los siguientes tipos de discontinuidad:

Discontinuidad Removible o Evitable: Esta discontinuidad se da cuando la condición II se cumple, pero no así la condición I, es decir, cuando $\lim_{x=c} f(x)$ existe, pero *F(X)* no está definida en *x=c*, provocando de esta manera que la condición III no se cumpla, esto es, $f(c) \neq \lim_{x=c} f(x)$ .Cabe mencionar que este tipo de discontinuidad se puede remover a evitar, como en el caso de las funciones racionales, por ejemplo, mediante el proceso de factorización que hemos llevado a cabo en varios de los ejemplos desarrollados.

Discontinuidad No Removible, Inevitable o de Primera especie: Este tipo de discontinuidad se presenta cuando la condición I se cumple, pero no así la condición II, específicamente, cuando los limites unilaterales existen en x=c, pero son distintos. Esto es, cuando

$$\lim_{x=c^-} f(x) \neq \lim_{x=c^+} f(x).$$

Discontinuidad Esencial o de Segunda especie: Este tipo de discontinuidad se da cuando uno de los limites unilaterales no existe en *x=c*.

Ejemplo 16. Determina si las siguientes funciones son continuas o discontinuas, en los puntos que se te indican:

Sea $f(x) = \begin{cases} 2 & si \ \ x = 1 \\ \dfrac{x^2 + x - 3}{x - 1} & si \ x \neq 1 \end{cases}$; determina si es continua en X=1.

Aplicando las tres condiciones de continuidad:

Veremos primero que *F(X)* en *X=1*, existe. (Tomamos ese valor ya que es el punto crítico donde la función cambia de forma).

F (1)=2.

Efectivamente se cumple la condición I. Calcularemos ahora el límite de la función f cuando x tiende a I.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(2x+3)=5.$$

Como el valor del límite es un número real, entonces existe. Por último verificaremos que se cumpla la condición III, $\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$.

$\lim_{x\to 1} f(x)=5$, pero f (1)= 2.

Entonces $\lim_{x\to 1} f(x)=5\neq 2=f(1).$.

La condición III no se cumplió, por lo tanto la función *F* no es continua en *X=1*; es discontinua en ese valor.

Sea $f(x)=\frac{1}{x-3}$; determina si es continua o discontinua en *x=3*.

En el caso de las funciones racionales es necesario, primeramente, ver para que valores de *X* la función no se fine; es decir, donde el denominador de la función se hace *0*. Para ello se toma el denominador *X-3* y se iguala a cero con la finalidad de despejar *X*.

X-3=0;

X-3+3=0+3;

X=3.

Entonces *f* (*x*) se indefine cuando *x* toma el valor 3, ya que la división por cero no es posible. Así vemos inmediatamente que la condición I no se cumple ya que *f* (3) no existe; por lo que *f* es discontinua en *x* = 3.

Observa en la Figura 1.8 que si cambiamos el valor de *c*, entonces *f* estaría bien definida, por lo que *f* (*c*) existiría. Haciendo posible que sea continúa en un valor de *c* diferente de 3.

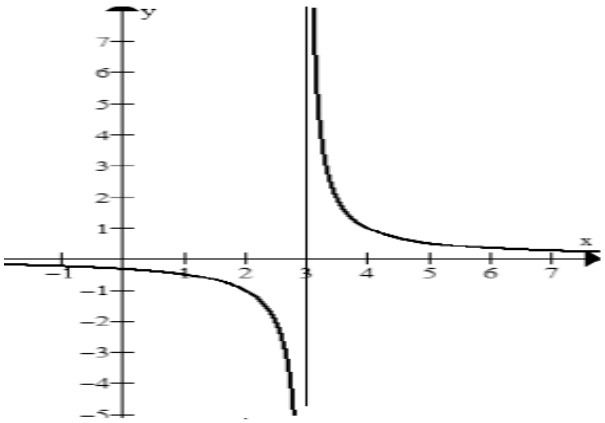


Fig. 2.8 Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

3. Sea $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \geq 5 \\ 2x-1 & si \quad x < 5 \end{cases}$, determina si es continua o discontinua en $x = 5$.

Aplicando las tres condiciones de continuidad:

f (*c*) existe; *f* (5) = 2(5) +1 = 11, existe. Por tanto cumple.

$\lim_{x \to 5} f(x)$ existe;

$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 11;$

$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 9;$

Ya que los límites unilaterales son diferentes concluimos que por lo que no se

$\lim_{x \to 5} f(x) = \nexists$

cumplió la condición II. Ya que una de las tres condiciones no se cumplió, podemos entonces concluir que f(x) es discontinua en x=5.

Contesta lo que se te pide.

1. Determina si las siguientes funciones son continuas o discontinuas.

En el punto donde se indica.

a) f (x) = x2 −1, en x = 2.

b) f (x) = 3x + 5, en x = −1.

c) f (x) = 2 + x, 1/2+X, en x = 0.

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, en $x = -3$.

e) f (x) = x −1, en x = 9.

f) $g(x) = \begin{cases} 3x & si \quad x \geq 3 \\ 2x+3 & si \quad x < 3 \end{cases}$ en $x = 3$.

g) $h(x) = \begin{cases} 9x & si \quad x < 9 \\ 10 & si \quad x = 9 \\ x^2 & si \quad x > 9 \end{cases}$; en $x = 9$.

h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-3} & si \quad x = 3 \\ 3x & si \quad x > 3 \\ x^2 & si \quad x > 3 \end{cases}$; en $x = 3$.

2. Demostrar que la función f (x) = x2 −1 es continua en x = 3.

3. Dada la función $g(x)=\begin{cases}3x-2 & si \quad x\geq 3\\ kx+1 & si \quad x<3\end{cases}$; para que valor de k la función es continua en x = 3.

ACTIVIDAD

Nombre _____

Fecha _____

INSTRUCCIONES:

Determina si las funciones son continuas o discontinuas en el punto indicado y compruébalas con la gráfica de cada una de ellas.

a) $f(x)=x^2-1$, en $x=-2$.

b) $f(x)=3x+5$, en $x=0$.

c) $f(x)=\frac{1}{3}-x$, en $x=-1$.

d) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$, en $x=-4$.

e) $f(x)=|x|$, en $x=0$.

f) $h(x)=\begin{cases}2x^2 & si \quad x\leq 2\\ 5x-2 & si \quad x>2\end{cases}$, en $x=2$.

g) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & si \quad x\leq 1\\ \sqrt{x^2+1} & si \quad x>1\end{cases}$, en $x=1$.

h) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$, en $x=-1$.

EJERCICIO

Nombre _____

Fecha _____

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada uno de los siguientes reactivos, resuélvelos y entrega un reporte a tu profesor.

Obtén los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+5)^2-25}{x}$

c) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

d) $\lim_{\theta\to 0}[2+3sen\,\theta]$

e) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3-3x^2-x+3}$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{3}$

g) $\lim_{x\to 2}\ln[(2x-8)^2+5x^3]$

h) $\lim_{x\to -3}(x^2-3x+2)(x-3)$

i) $\lim_{x\to \infty}\frac{4x+4}{2x+5}$

j) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2}-5}$

Determina el signo + ó − del ∞, resolviendo los siguientes ejercicios con límites infinitos.

a) $\lim_{x\to 2^+}\frac{5x}{-x+2}$

b) $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2}{x-3}$

c) $\lim_{x\to -2/7^+}\frac{2x-3}{7x+2}$

Determina si las siguientes funciones son continuas en el punto indicado.

a) $f(x)=3x+5$; en $x=2$.

b) $f(x)=5(x+2)^2-7$; en $x=-1$.

c) $f(x)=-1\,|\,x-1\,|+4$; en $x=0$.

d) $f(x)=\dfrac{x^2-36}{x-6}$; en $x=36$.

e) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^3 & si \;\; x\le 2 \\ (x+1)^2+5 & si \;\; x>2 \end{cases}$; en $x=2$.

f) $g(x)=\begin{cases} 3(x+1)^2-1 & si \;\; x<-1 \\ -1 & si \;\; x=-1 \\ x-1 & si \;\; x>-1 \end{cases}$; en $x=-1$.

Hallar el valor de *x* donde la función es discontinua y determina si esa discontinuidad puede ser removible o no; es decir, si la función se puede expresar como otra función mediante factorización.

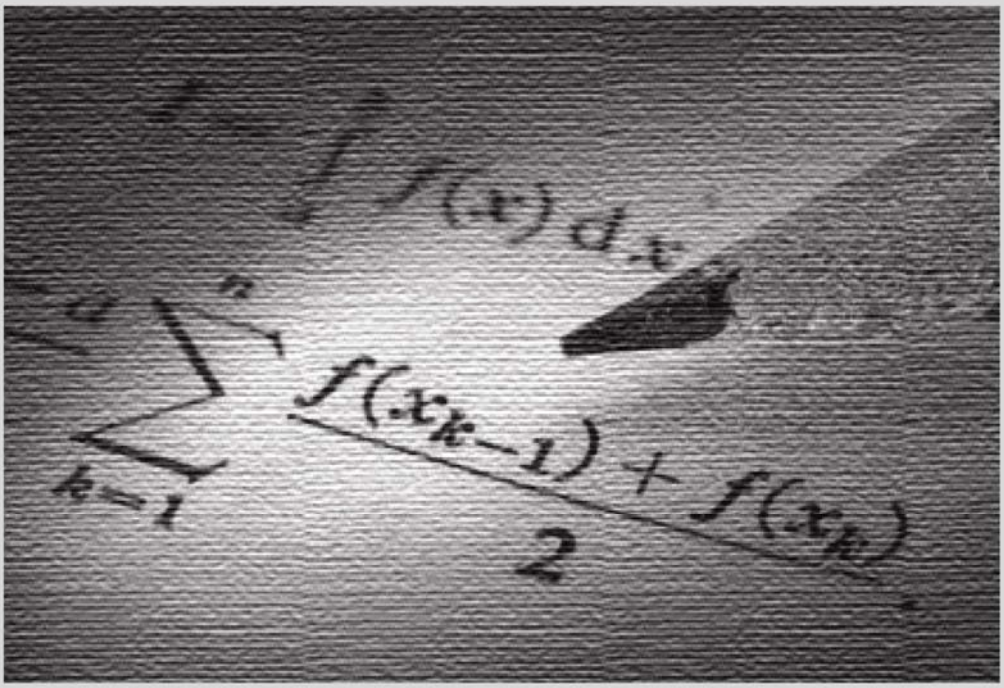
a) $f(x)=\dfrac{2}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$

c) $g(x)=\begin{cases} 0 & si \;\; x=0 \\ 2 & si \;\; x\neq 0 \end{cases}$

UNIDAD 3

DERIVACIÓN DE FUNCIONES



RESULTADOS DE APRENDIZAJE:
Analiza y resuelve problemas sobre razones de cambio y la derivada, aplicando los principios, los conceptos y las reglas para la interpretación grafica en contextos de las ciencias naturales, económicas y administrativas.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR:
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas
apropiadas.(Atributo: 4.1)
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. (Atributos: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.6)
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. (Atributos: 6.1 y 6.3)
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. (Atributos: 7.1)
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. (Atributos: 8.1, 8.2 y 8.3)

3.1 LA DERIVADA.

LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO.

DERIVADA: La derivada de una función ***y = f (x)*** que se denota como ***y'***, o bien $\frac{dy}{dx}$ es la razón de cambio instantánea de *y* respecto a la variable independiente *(x)*. Específicamente:

$$Y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$$

Cuando ese límite existe.

3.2 REGLA GENERAL PARA LA DERIVACIÓN (REGLA DE LOS CUATRO PASOS).

Empecemos con la primera ecuación que será lineal.

Ejemplo 1: $Y = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$

PASO 1. Incrementar las 2 variables (Variables X y Y). Acá se les pone el Incremento Delta (Δ) representado por un triangulo a cada variable.

$Y + \Delta \mathbf{y} = (x + \Delta \mathbf{x})^3 + 2(x + \Delta \mathbf{x})^2 - 3(x + \Delta \mathbf{x}) - 1$

PASO 2. Desarrollar operaciones algebraicas y restarle la función original. Algebraicamente se desarrolla la ecuación (ej. binomios, trinomios) y terminado se le restará la función original al resultado.

$Y + \Delta \mathbf{y} = (x + \Delta \mathbf{x})^3 + 2(x + \Delta \mathbf{x})^2 - 3(x + \Delta \mathbf{x}) - 1$

$Y + \Delta y = (x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + 2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 3x - 3\Delta x - 1$

$Y + \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x - 1$

$Y + \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x - 1$
$-Y \quad -x^3 \quad -2x^2 \quad +3x \quad +1$

$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3\Delta x$

PASO 3. Obtener la razón dividiendo la función incrementada por Δx. Es decir, dividir cada elemento entre Δx para así eliminar valores delta (Δx)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$\Delta y/\Delta x = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 4x + 2\Delta x - 3$

PASO 4. Sustituir Δx cuando tiende a 0 que es el límite de la función. Sustituiremos todos los Δx por [0] en toda la ecuación y se multiplicara (Variable multiplicada por 0 da 0)

$\Delta y/\Delta x = 3x^2 + 3x[0] + [0]^2 + 4x + 2[0] - 3$

$$\mathbf{\Delta y/\Delta x = 3x^2 + 4x - 3}$$

Este es el resultado final de una derivación mediante la regla de los 4 pasos para derivar una ecuación.

ACTIVIDAD 1.

Instrucciones: Desarrolle las siguientes funciones aplicando la regla de los cuatro pasos.

1. Calcula la derivada de la función ***y = 5x***

PASO 1. *Incrementar las 2 variables (Variables X y Y).*

PASO 2. *Desarrollar operaciones algebraicas y restarle la función original.*

PASO 3. *Obtener la razón dividiendo la función incrementada por Δx.*

PASO 4. *Sustituir Δx cuando tiende a 0 que es el límite de la función.*

… Continuación ejercicio 2.

2. Calcula la derivada de la función ***y = 5x - 12***

PASO 1. *Incrementar las 2 variables (Variables X y Y).*

PASO 2. *Desarrollar operaciones algebraicas y restarle la función original.*

PASO 3. *Obtener la razón dividiendo la función incrementada por Δx.*

PASO 4. *Sustituir Δx cuando tiende a 0 que es el límite de la función*

… Continuación, ejercicio 3.

3. Calcula la derivada de la función $y = mx + b$

PASO 1. *Incrementar las 2 variables (Variables X y Y).*

PASO 2. *Desarrollar operaciones algebraicas y restarle la función original.*

PASO 3. *Obtener la razón dividiendo la función incrementada por Δx.*

PASO 4. *Sustituir Δx cuando tiende a 0 que es el límite de la función*

… Continuación, ejercicio 4.

4. Calcula la derivada de la función $y = x + x^2$

PASO 1. *Incrementar las 2 variables (Variables X y Y).*

PASO 2. *Desarrollar operaciones algebraicas y restarle la función original.*

PASO 3. *Obtener la razón dividiendo la función incrementada por* Δx.

PASO 4. *Sustituir* Δx *cuando tiende a 0 que es el límite de la función*

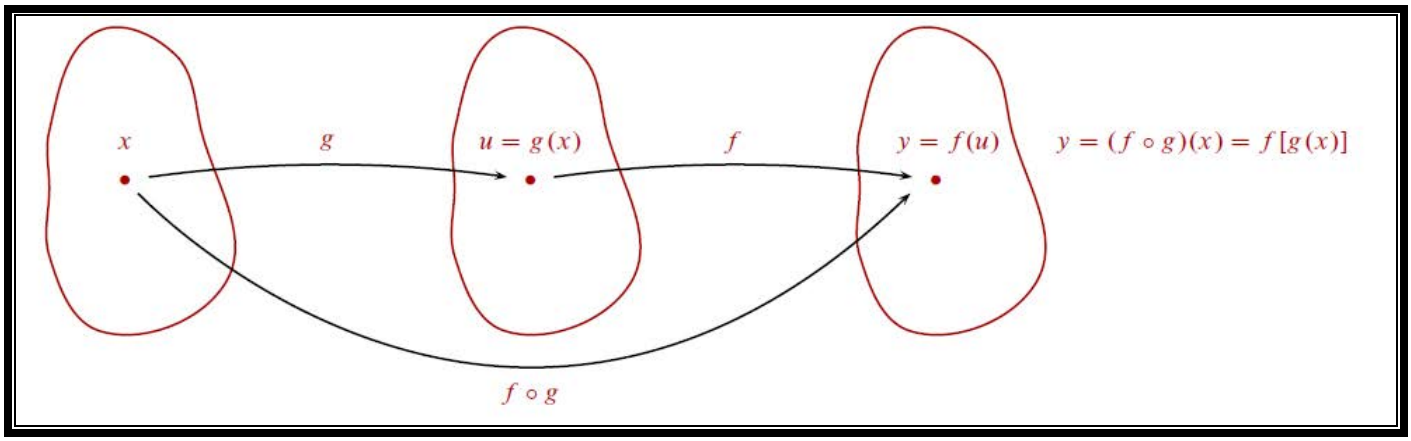
3.3 REGLA DE LA CADENA.

La gran mayoría de las funciones que se estudian en cálculo están construidas por una composición de funciones, de aquí la importancia de conocer un método sencillo para diferenciar dichas funciones; el método utilizado para hallar la derivada de una función compuesta se conoce como "**Regla de la cadena**".

La derivada de una función con respecto a ***x***, es igual a la derivada de la función con respecto a ***u***, multiplicada por la derivada de ***u*** con respecto a ***x***.

La **regla de la cadena** no es más que una fórmula para la derivada de la composición de dos funciones.

$$\frac{d\left(u^{n}\right)}{dx} = nu^{n-1}u'$$



Si $y = f(u), u = g(x)$, y si $\frac{dy}{du}\, y \frac{du}{dx}$ existen, entonces la función compuesta definida por $y = f(g(x))$ tiene una derivada dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(u) = f'(g(x))g'(x)$

EJERCICIO NO. 1 Regla de la cadena

Encontrar la derivada de la función $h(x)=(5x^2+3x)^2$ Vamos a ver dos maneras distintas de resolver este ejercicio.

Primera solución: Para poder utilizar las fórmulas que tenemos hasta este momento, debemos calcular el cuadrado y luego derivar el resultado $h(x)=25x^4+30x^3+9x^2$ entonces: $h'(x)=100x^3+90x^2+18x$

Segunda solución: Veamos ahora otra manera de resolver este problema que consiste en pensar a $h(x)=(5x^2+3x^2)^2$ como la composición de dos funciones.

Si hacemos $y=5x^2+3x$ y $g(y)=y^2$ entonces $h=g(y)$ en efecto $h=g(y)=y^2=(5x^2+3x)^2$

Si calculamos por separado las derivadas de **g** y **y** , $\begin{matrix} y'=10x+3 \\ g'(y)=2y \end{matrix}$ las multiplicamos $g'(y)y'=2y(10x+3)$ y sustituimos y por $5x^2+3x$, obtenemos $g'(y)y'=2(5x^2+3x)(10x+3),$ lo cual coincide con la derivada de $h(x)=25x^4+30x^3+9x^2$ como podemos comprobar haciendo las multiplicaciones indicadas:

$$g'(y)y'=2(5x^2+3x)(10x+3)=(10x^2+6x)(10x+3)$$
$$=100x^3+90x^2+18x=h'(x)$$

Es decir, $h'(x)=g'(y)f'(x)$

Este procedimiento se conoce como la Regla de la Cadena y se enuncia de la siguiente manera:
Regla de la cadena: Si **f** es derivable en **x** y **g** es derivable en $y=f(x)$ entonces la composición $h(x)=g(f(x))$ es derivable en **x** y

$$h'(x)=g'(y)f'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

O brevemente, si $h=g(y)$, entonces: $h'=g'(y)y'$

Hay funciones que son composición de funciones, como la del ejemplo introductorio, que antes de derivarse pueden reescribirse, efectuando las operaciones indicadas, para convertirlas en una función más simple, en el ejemplo, elevamos al cuadrado antes de derivar, pero no siempre las funciones propuestas se prestan a ello.

En los siguientes se aplica la regla de la cadena.

Ejemplo no. 2 Derivar $h(x)=(8x^2-4x+1)^4$

Hacemos $y=8x^2-4x+1$ y $g(y)=y^4$, entonces $h=g(y)$ de donde $h=g(y)$
$y'=4y^3((16x-4))=4(8x^2-4x+1)^3(16x-4)$

Cuando se aplica la regla de la cadena es más práctico utilizar D_x para indicar las derivadas de las funciones interiores.

Ejemplo no. 3 $f(x)=(2x+1)^3$

Solución: Aplicando la regla de la cadena.

$$f'(x)=3(2x+1)^{3-1}.D_x(2x+1)=3(2x+1)^2.2$$
$$f'(x)=6(2x+1)^2$$

Ejemplo no. 4 $f(x)=(x^2+4x-5)^4$

Solución: Aplicando la regla de la cadena.

$$f'(x)=4(x^2+4x-5)^{4-1}.D_x(x^2+4x-5)=4(x^2+4x-5)^3.(2x+4)$$
$$f'(x)=8(2x+4)(x^2+4x-5)^3$$

Ejemplo no. 5 $f(x)=(x^2+4x-5)^4$

Solución: Aplicando la regla de la cadena.

$$f'(x)=4(x^2+4x-5)^{4-1}.D_x(x^2+4x-5)=4(x^2+4x-5)^3.(2x+4)$$
$$f'(x)=8(2x+4)(x^2+4x-5)^3$$

EJEMPLO NO. 6

$(2x^3+5)^{10}$

Aplicando la fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{d}{du}u^{10}\right)\left[\frac{d}{dx}(2x^3+5)\right]=$$

$$(10u^9)\left[6x^2+0\right]=10u^9(6x^2)=$$

$$10(2x^3+5)^9 6x^2=60x^2(2x^3+5)^9$$

EJEMPLO NO. 7

$y=(2x-7)^3$

$u=2x-7$

$u'=2$

$y'=3(2x-7)^{3-1}(2)$

$y'=6(2x-7)^2$

EJEMPLO NO. 8

$(2x+1)^3$

$f\quad f(x)=(3x-5)^{-5}$ l)^2.2

$f\quad u=3x-5$

$u'(x)=3$

$f'(x)=-5(3x-5)^{-5-1}(3)$

$f'(x)=-15(3x-5)^{-6}$

$$f'(x)=-\frac{15}{(3x-5)^6}$$

EJEMPLO NO. 9

Aplicando la fórmula:

$$f(x)=\frac{2}{3}(6x-4)^6$$

$u=6x-4$

$u'=6$

$$f'(x)=\frac{2}{3}(6)(6x-4)^{6-1}(6)$$

$$f'(x)=\frac{72}{3}(6x-4)^5$$

EJEMPLO NO. 10

$g(x)=(x^2-6x)^{\frac{2}{4}}$

$u=x^2-6x$

$u'=2x-6$

$$g'(x)=\frac{2}{4}(x^2-6x)^{\frac{2}{4}-1}(2x-6)$$

$$g'(x)=\frac{2}{4}(x^2-6x)^{-\frac{2}{4}}(2x-6)$$

$$g'(x)=\frac{2(2x-6)}{4(x^2-6x)^{\frac{2}{4}}}$$

$$g'(x)=\frac{2(2x-6)}{4\sqrt[4]{(x^2-6x)}}$$

Actividad de aprendizaje no. 1

Instrucciones: Dadas las siguientes funciones encuentra su derivada.

1) $f(x)=(5x-6)^3$	2) $f(x)=(6x+3)^5$
3) $f(x)=(3-5x+x^2)^{-3}$	4) $y=\dfrac{4}{5(x^2-4)^2}$
5) $y=\sqrt{16x}$	6) $f(x)=(3x-3)^{\frac{1}{3}}$
7) $g(x)=2(x-1)^{100}$	8) $f(x)=\sqrt[3]{5x^2}-6$

3.4. REGLAS O FÓRMULAS DE DERIVACIÓN PARA LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Fórmulas de derivación en funciones trascendentales

En las funciones trascendentales se encuentran las funciones trigonométricas directas e inversas, funciones exponenciales y logarítmicas.

Derivación de funciones trigonométricas directas

$\frac{d}{dx}(senu) = u'\cos u$	$\frac{d}{dx}(\cot u) = u'\csc^2 u$
$\frac{d}{dx}(\cos u) = -u'senu$	$\frac{d}{dx}(\sec u) = u'\tan u \sec u$
$\frac{d}{dx}(\tan u) = u'\sec^2 u$	$\frac{d}{dx}(\csc u) = -u'\cot u \csc u$

Ejemplos: Encuentra la derivada de las siguientes funciones trigonométricas directas.

EJEMPLO NO. 1

Aplicando la fórmula:

$y = sen(6x)$

$u = 6x$

$u' = 6$

$y' = 6\cos 6x$

EJEMPLO NO. 2

$f(x) = \cos(8x^3)$

$u = 8x^3$

$u' = 24x^2$

$f'(x) = -24x^2 sen(8x^3)$

EJEMPLO NO. 3

$f(x) = 4\tan(4x-1)$

$u = 4x-1$

$u' = 4$

$f'(x) = 4\left[4\sec^2(4x-1)\right]$

$f'(x) = 16\sec^2(4x-1)$

EJEMPLO NO. 4

$f(x) = \cot\left(\frac{7x}{3}\right)$

$u = \frac{7x}{3}$

$u' = \frac{7}{3}$

$f'(x) = -\frac{7}{3}\csc^2\left(\frac{7x}{3}\right)$

EJEMPLO NO. 5

$f(x) = \sec\sqrt{x}$

$u = \sqrt{x}$

$u' = (x)^{\frac{1}{2}}$

$u' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$

$u' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{x}\sec\sqrt{x}$

EJEMPLO NO. 6

$f(x) = \cot(4x^2 - 3x)$

$u = 4x^2 - 3x$

$u' = 8x - 3$

$f'(x) = -8(8x-3)\cot(4x^2-3x)\csc(4x^2-3x)$

Actividad de aprendizaje no. 2

INSTRUCCIONES: Encuentra la derivada de las siguientes funciones trigonométricas.

1) $y = Sen(8x)$	**2)** $y = Sen(15x)$
3) $y = Sen\left(\frac{5x}{7}\right)$	**4)** $y = \frac{2}{3}sen(9x)$
5) $y = \cos(2x)$	**6)** $y = \cos(x^5)$

Actividad de aprendizaje no. 3

1.- Subraya la derivada de las siguientes funciones trigonométricas directas.

1) $y = sen(2x)$

A) $y' = x\cos 2$ B) $y' = \cos 2 \cos x$ C) $y' = 2\cos(2x)$ D) $y' = 2sen(2x)$

2) $y = \cos(3x^4)$

A) $y' = -12x^3 sen(3x^4)$ C) $y' = -13x^4 sen(12x^3)$

B) $y' = 12x^3 sen(3x^4)$ D) $y' = -13x^4 \cos(12x^3)$

3) $y = \tan(7x)$

A) $y' = 7sen^2(7x)$ B) $y' = 7\sec^2(7x)$ C) $y' = x\sec(7)$ D) $y' = 7\tan(7x)$

4) $f(x) = \sec(5x^2)$

A) $f'(x) = 10x\tan(5x)\sec(5x)$ C) $f'(x) = 10\tan(5x^2)\sec(5x^2)$

B) $f'(x) = 10x\tan(5x^2)\sec(5x^2)$ D) $f'(x) = 5x\tan(5x^2)\sec(5x^2)$

3.5 DERIVACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$\frac{d}{dx}(arcsenu)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{d}{dx}(arc\cot u)=-\frac{u'}{1+u^2}$
$\frac{d}{dx}(\arccos u)=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{d}{dx}(arc\sec u)=\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$\frac{d}{dx}(\arctan u)=\frac{u'}{1+u^2}$	$\frac{d}{dx}(arc\csc u)=-\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

EJEMPLOS: Encuentra la derivada de las siguientes funciones trigonométricas inversas.

1) $y=arcsen(2x)$ $u=2x \qquad u'=2$ $u^2=4x^2$ $y'=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$	2) $y=\arccos(3x^2)$ $u=3x^2 \qquad u'=6x$ $u^2=9x^4$ $y'=-\frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}$
3) $y=\arctan(2x-5)$ $u=2x-5 \qquad u'=2$ $u^2=(2x-5)^2$ $y'=\frac{2}{1+(2x-5)^2}$	4) $y=arc\cot\left(\frac{3x}{5}\right)$ $u=\frac{3x}{5} \qquad u'=\frac{3}{5}$ $u^2=\frac{9x^2}{25}$ $y'=-\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{9x^2}{25}}=-\frac{3}{5\left(1+\frac{9x^2}{25}\right)}$
5) $y=arc\sec(x^4)$ $u=x^4 \qquad u'=4x^3$ $u^2=x^8$ $y'=\frac{4x^3}{x^4\sqrt{x^8-1}}$	6) $y=arc\csc(5x)$ $u=5x \qquad u'=5$ $u^2=25x^2$ $y'=-\frac{5}{5x\sqrt{25x^2-1}}$

Actividad de aprendizaje no. 4

INSTRUCCIONES: Encuentra la derivada de las siguientes funciones trigonométricas inversas.

1) $y = arcsen(12x)$	2) $y = arcsen(21x)$
3) $y = arcsen(5x^2)$	4) $y = arcsen(x^3)$
5) $y = \arccos\left(\frac{2x}{5}\right)$	6) $y = \frac{2}{5}\arccos(3x)$
7) $y = \arccos(x^3 - 4x)$	8) $y = 7\arccos(6x - 1)$

Actividad de aprendizaje no.5

Relaciona las funciones trigonométricas inversas con su derivada.

Funciones Trigonométricas Inversas	Derivada
$\frac{d}{dx}(arcsenu) =$	$\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$\frac{d}{dx}(\arccos u) =$	$-\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$\frac{d}{dx}(\arctan u) =$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\frac{d}{dx}(arc\sec u) =$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\frac{d}{dx}(arc\cot u) =$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
$\frac{d}{dx}(arc\csc u) =$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

3.6 Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas.

Logarítmicas	Exponenciales
$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{u'}{u}$	$\frac{d}{dx}(a^u) = u'a^u \ln a$
	$\frac{d}{dx}(e^u) = u'e^u$

Ejemplos: Encuentra la derivada de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas.

$f(x) = \ln(5x-7)$ $u = 5x-7$ 1) $u' = 5$ $f'(x) = \frac{5}{5x-7}$	$f(x) = \ln(4x^2-8x+3)$ $u = 4x^2-8x+3$ 2) $u' = 8x-8$ $f'(x) = \frac{8x-8}{4x^2-8x+3}$
$f(x) = 9^{3x}$ $u = 3x$ 3) $u' = 3$ $f'(x) = 3(9^{3x})\ln 9$	$f(x) = 3^{x^2-3x}$ $u = ^{x^2-3x}$ 4) $u' = 2x-3$ $f'(x) = (2x-3)(3^{x^2-3x})\ln 3$
$f(x) = e^{2x}$ $u = 2x$ 5) $u' = 2$ $f'(x) = 2e^{2x}$	$f(x) = e^{x^2+5x}$ $u = x^2+5x$ 6) $u' = 2x+5$ $f'(x) = (2x+5)e^{x^2+5x}$

Actividad de aprendizaje no.6

INSTRUCCIONES: Encuentra la derivada de las siguientes funciones logarítmicas.

1) $f(x) = \ln(5x)$	2) $f(x) = \ln(6x^3)$
3) $f(x) = \ln(4x - 8)$	4) $f(x) = \ln(9x^3)$
5) $f(x) = \ln(3x^2 - 5)$	6) $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$

Actividad de aprendizaje no.7

INSTRUCCIONES: Encuentra la deriva de las siguientes funciones exponenciales.

1) $f(x) = e^{-3x}$	2) $f(x) = e^{5x}$
3) $f(x) = e^{x^2-3x}$	4) $f(x) = e^{8-7x^2}$
5) $f(x) = e^{x^2+4x+5}$	6) $f(x) = e^{3x^2-4x+5}$
7) $f(x) = 5^{x^2}$	8) $f(x) = 4^{6x^3}$
9) $f(x) = 7^{x^2-5x+6}$	10) $f(x) = 6^{3x}$
11) $f(x) = 4^{5-7x}$	12) $f(x) = 3^{-7x}$

Actividad de aprendizaje no. 8

Instrucciones. Encuentra las palabras correspondientes a las unidades vistas en cálculo diferencial.

SOPA DE LETRAS

R	V	D	E	R	I	V	A	D	A	S	A	L	G	E	R	S	O
E	E	O	A	E	X	P	O	N	E	N	C	I	A	L	E	S	P
X	L	M	F	G	A	E	P	O	F	O	R	M	U	L	A	S	O
I	O	I	G	L	E	N	T	C	U	L	A	I	N	N	C	A	T
T	C	N	K	A	R	s	I	I	N	U	z	T	A	E	T	C	E
O	I	I	D	D	T	A	M	O	C	C	o	E	I	M	I	I	N
I	D	O	A	E	I	R	I	N	I	L	N	S	R	R	T	R	C
N	A	S	D	L	P	A	Z	E	O	A	A	Y	D	A	U	T	I
I	D	N	I	A	S	M	A	W	N	C	R	P	A	C	D	E	A
M	P	O	U	C	E	N	R	A	R	S	O	M	I	N	I	M	S
O	R	I	N	A	T	R	A	S	C	E	N	D	E	N	N	O	Y
D	O	C	I	D	I	C	U	A	T	R	O	P	A	S	O	N	S
A	M	A	T	E	M	A	X	I	M	O	S	W	P	T	I	O	V
R	E	C	N	N	I	N	V	E	S	T	I	G	A	R	Q	G	B
T	D	I	O	A	L	G	E	B	R	A	I	C	A	S	R	I	N
N	I	L	C	O	M	P	E	T	E	N	C	I	A	S	E	R	P
O	O	P	V	A	L	O	R	E	S	S	A	B	E	R	S	T	O
C	R	A	Z	O	N	D	E	C	A	M	B	I	O	A	Y	U	I

Regla de la cadena	**función**	**Razón de cambio**	**dominio**	**algebraicas**	limites
Derivada	**Formulas**	**contra dominio**	**potencias**	**optimizar**	exponenciales
Algebraicas	**Potencias**	**máximos**	**mínimos**	**pensar**	aplicación
Razonar	Trigonométricas	Pensar	competencias	calculo	Velocidad promedio

UNIDAD 4

APLICACIONES DE LA DERIVADA

DE APRENDIZAJE: Al finalizar la secuencia, el alumno comprenderá el concepto de derivada mediante su interpretación geométrica y lo aplicará en el análisis de problemas que impliquen una razón de cambio, así mismo calculará los puntos máximos y mínimos de una función, aplicándolos en la solución y el análisis de problemas que implique crecimiento y decrecimiento.

El alumno derivará funciones aplicando las fórmulas y calculará el o los puntos de inflexión de una función.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR:

14. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.(Atributo: 4.1)
15. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. (Atributos: 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.6)
16. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva. (Atributos: 6.1 y 6.3)
17. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. (Atributos: 7.1)
18. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. (Atributos: 8.1, 8.2 y 8.3)

4.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN.

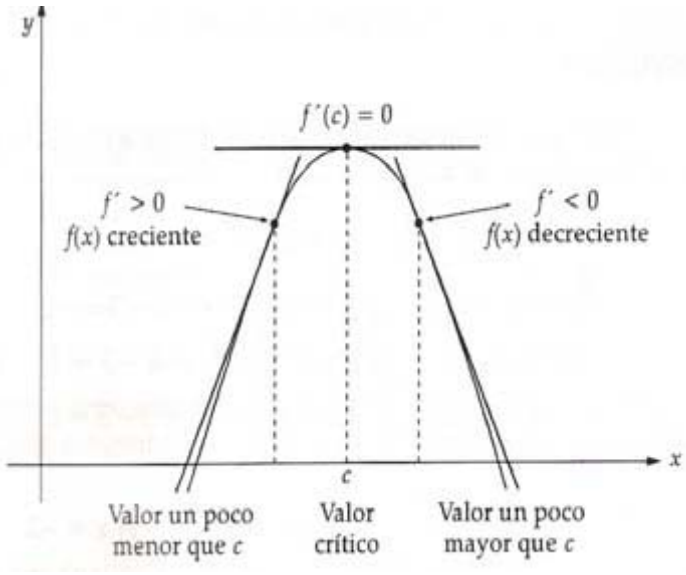
Un máximo y un mínimo no son necesariamente el mayor ni el menor valor de la función, por eso se les llama máximo y mínimos relativos.
Para obtener los máximos y mínimos relativos, hay dos procedimientos:

- El criterio de la primera derivada.
- El criterio de la segunda derivada.

Para el análisis de funciones que se desarrollarán se utiliza el criterio de la primera derivada.

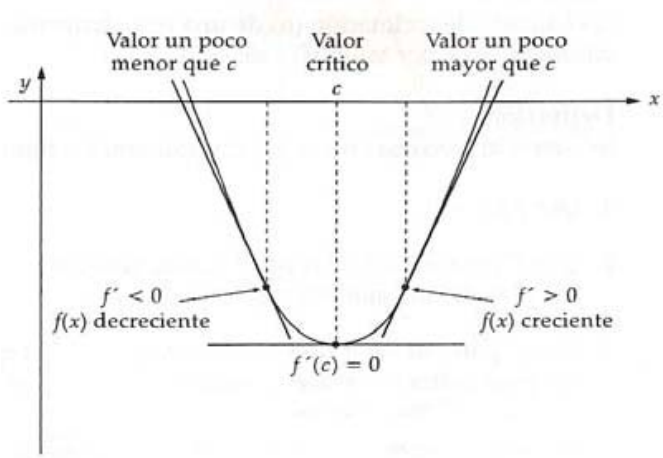
- *Máximo relativo:*

La función pasa de creciente a decreciente; es decir, el valor de la derivada pasa de positivo a negativo.



- *Mínimo relativo:*

La función pasa de decreciente a creciente; es decir, el valor de la derivada pasa de negativo a positivo.



Para hallar los máximos y mínimos relativos de una función se sugiere seguir los pasos que se mencionan a continuación:

1. Derivar f(x)
2. Encontrar los valores críticos.
3. Determinar los puntos críticos.
4. Determinar los intervalos de prueba con los valores críticos obtenidos.
5. Determinar el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos utilizando un número de prueba en cada uno de éstos.
6. Si el signo de $f'(x)$ en los intervalos de prueba consecutivos es diferente, entonces en el punto crítico hay un extremo relativo. Si en el que está a la izquierda del valor crítico dicho signo es positivo y a la derecha es negativo, entonces el punto crítico es un máximo relativo de f(x).Si por el contrario, $f'(x)$ tiene signo negativo a la izquierda del valor crítico y signo positivo a la derecha, entonces el punto crítico es un mínimo relativo de f(x).
7. Sí $f'(x)$ no cambia de signo alrededor del valor crítico entonces no es ni máximo ni mínimo.

Ejemplo: Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3-3x^2+4$

Paso 1 Derivar la función *f*(x)

$$f'(x) = 3x^2-6x$$

Paso 2 Encontrar los valores críticos, resolviendo la ecuación que resulta de igualar la derivada a cero

$$3x^2-6x=0$$

En donde al factorizar la expresión del miembro izquierdo se obtiene:

$$3x(x - 2)=0$$

Igualando cada uno de los factores a cero tenemos que:

Valores críticos $\Longrightarrow$ $3x=0$ y $X=0$; $X-2=0$ $X=2$

Paso 3 Determinar los puntos críticos, evaluando en la función original

$$f(x) = x^3-3x^2+4$$

x = 0

$f(x) = (0)^2 - 3(0) + 4 = 4$ (0,4)

x = 2

$f(2)= (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 0$ (2,0)

Para realizar el siguiente paso, es necesario realizar la recta numérica para obtener los intervalos y números de prueba como en el ejemplo del ejercicio anterior.

Pasos:

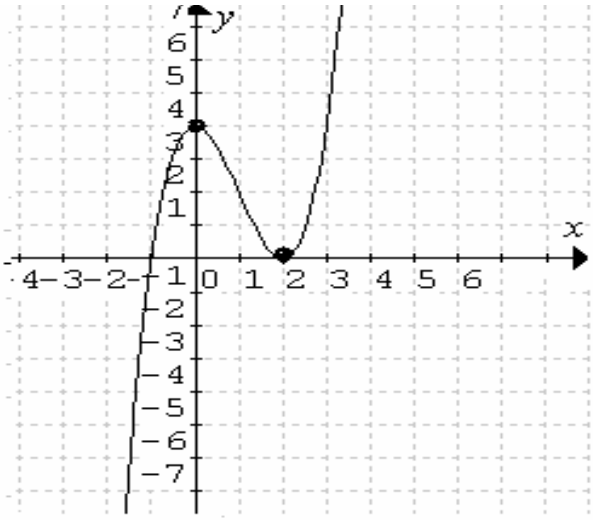
Paso 4	Paso 5		Paso 6
Intervalo de prueba	**Numero de prueba**	**Evaluación $f'(x)$**	***Signo de $f'(x)$***
$(-\infty,0)$	-1	$f'(-1)=3(-1)^2 - 6(-1)= 9>0$	+
(0,2)	1	$f'(0)=3(1)^2 - 6(1)= -3<0$	-
$(2,\infty)$	3	$f'(3)=3(3)^2 - 6(3)= 9>0$	+

Cambia de más a menos, es decir, ***crece*** y luego ***decrece***, por lo tanto hay un ***máximo*** relativo en el punto crítico (0,4) que es el que se encuentra dentro de los dos intervalos analizados.

Cambia de menos a más, es decir, ***decrece*** y luego ***crece***, por lo tanto hay un ***mínimo*** relativo en el punto crítico (2,0) que es el que se encuentra dentro de los dos intervalos analizados.

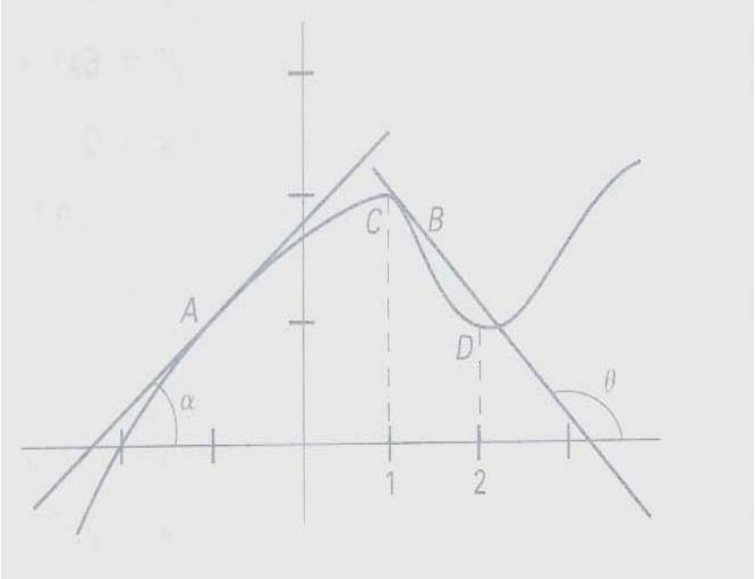
Graficando observamos que en él:

Punto (0,4) hay un máximo relativo
Punto (2,0) hay un mínimo relativo



4.1.1 NÚMEROS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN.

Si representamos gráficamente una función, al moverse un punto de izquierda a la derecha, observamos con facilidad que unas veces es creciente y otras decrecientes.



Los valores de x, en este ejemplo x= 1, x=2 en los cuales la gráfica de la función f(x) es estacionaria, se le llaman valores críticos y a los puntos correspondientes, en este caso C y D, puntos críticos.

Para encontrar los valores críticos se procede a:

1. Obtener la primera derivada f' (x).
2. Igualar a cero la derivada f' (x) = 0.
3. Resolver la ecuación para hallar el valor crítico de x.

Ejemplo:

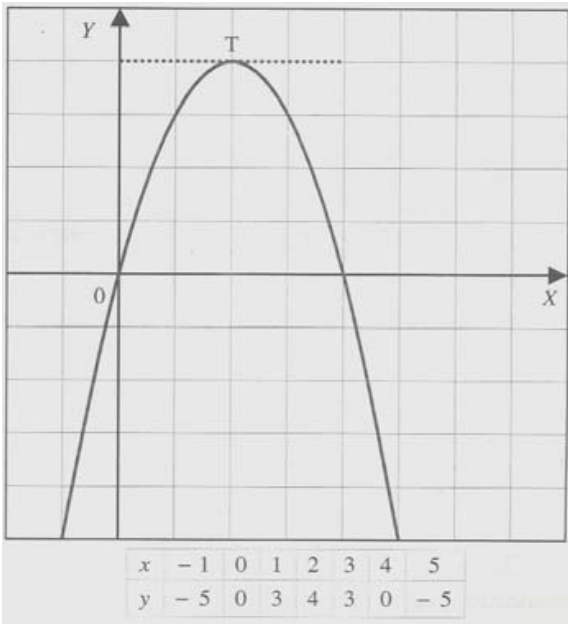
Sea la función $y = 4x - x^2$

A partir de una tabla de valores trazamos la gráfica de la función.

A partir de una tabla de valores trazamos la gráfica de la función.

En la grafica observamos que la función presenta un valor máximo para *x = 2,* es decir en el punto T en donde *y = 4* que es el valor máximo de la función.

Este comportamiento se comprueba si trazamos la tangente a la curva que pasa por el punto T, la que necesariamente es paralela al eje de las x, por tanto su pendiente es cero.
Según el procedimiento anteriormente descrito para la obtención de valores críticos:



x	−1	0	1	2	3	4	5
y	−5	0	3	4	3	0	−5

Paso 1 Obtener la primera derivada de la función dada:

y' = 4 – 2x

Paso 2 Igualar a cero la derivada

4 – 2x = 0

Paso 3 Resolver la ecuación resultante

4 – 2x = 0 - 2x = - 4 $x = \frac{-4}{-2}$ x = 2 valor critico

Sustituyendo, el valor de x en la ecuación dada, tenemos:

$y = 4x – 2x^2$
$y = 4(2) – 2(2)^2 = 8 – 4$
y = 4

Por lo tanto el punto crítico (x,y) es (2,4)

4.1.2 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA.

- *Función creciente*

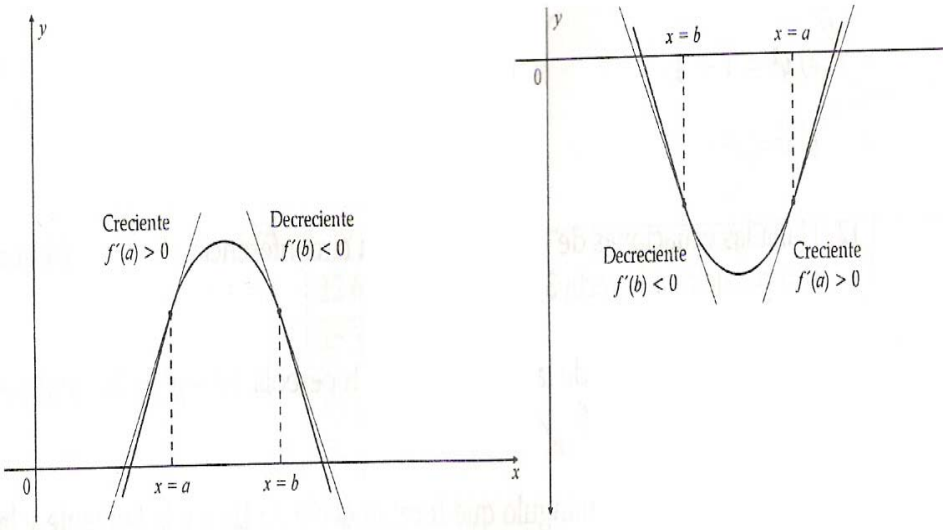
Una función es creciente cuando su derivada es positiva.

f (x) es creciente en x = a, si f '(a) > 0

- *Función decreciente*

Una función es decreciente cuando su derivada es negativa

f (x) es decreciente en x = b, si f '(b) < 0



NOTA: Observa en ambas gráficas, que en el punto sobre la curva donde $x = a$, $f'(a)$ es positiva, y en el punto sobre la curva donde $x = b$, $f'(b)$ es negativa.

Para obtener los intervalos donde la función es creciente y decreciente, se siguen los pasos:

1. Derivar f(x)
2. Encontrar los valores críticos.
3. Determinar los intervalos de prueba con los valores críticos obtenidos.
4. Determinar el signo de f ' (x) en cada uno de los intervalos utilizando un número de prueba, cada uno de éstos evaluados en la derivada.
5. Aplicar el criterio siguiente

ƒ (x) es creciente en x = a, si ƒ' (a) > 0
ƒ (x) es decreciente en x = b, si ƒ' (b) < 0

Ejemplo:
Encuentra los intervalos en los que $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ es creciente o decreciente.

Paso 1 Derivar la función $f(x)$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 12x - 36$

Paso 2 Encontrar los valores críticos, resolviendo la ecuación que resulta de igualar la derivada a cero.

$$3x^2 - 12x - 36 = 0$$

Dividiendo a ambos miembros entre 3 resulta:

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

En donde al factorizar la expresión del miembro izquierdo se obtiene:

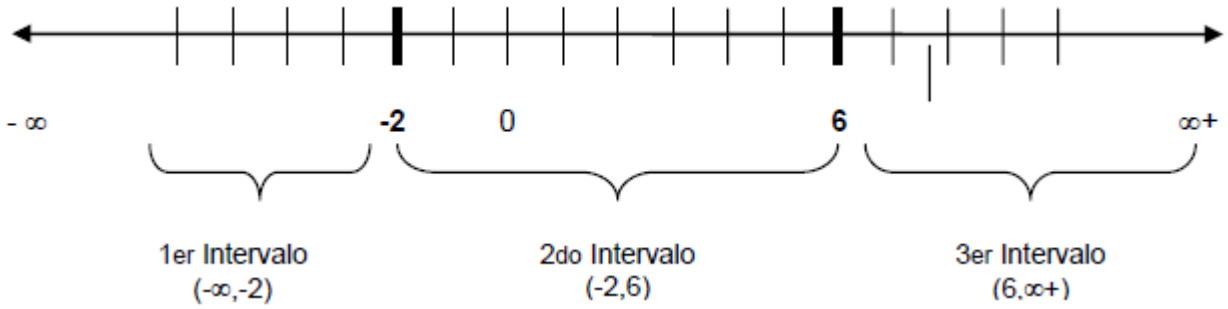
$$(x - 6)\,(x - 2) = 0$$

Igualando cada uno de los factores a cero tenemos que:

Valores críticos $\Longrightarrow$ $\quad X - 6 = 0 \quad$ y $\quad X + 2 = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad X = 6 \qquad\qquad\quad X = -2$

Para realizar el siguiente paso, es necesario obtener los intervalos y números de prueba:

Para determinar los intervalos de prueba, se recomienda trazar una recta numérica desde -∞ hasta +∞ y en ella marcar el o los valores críticos para poder determinar los intervalos de prueba:



El número de prueba puede ser cualquiera dentro del intervalo, mas sin embargo se recomienda:

1er intervalo (-∞,-2): se escoge el inmediato anterior al valor crítico, que corresponde al número **-3**

2do intervalo (-2, 6): se escoge cualquier valor entre este intervalo, de preferencia el 0 si este está dentro de los dos valores críticos, en este caso se escoge el **0**

3er intervalo (6, ∞+): se escoge el inmediato posterior al valor crítico, que corresponde al número **-7**

Paso 3	Paso 4			Paso 5
Intervalo de prueba	**Número de prueba**	**Evaluación de f'(x)**	**Signo de f'(x)**	**Conclusión**
(-∞,-2)	-3	$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12(-3) - 36 = 27$	+	Creciente
(-2,6)	0	$f'(0) = 3(0)^2 - 12(0) - 36 = -36$	-	Decreciente
(6,∞)	7	$f'(0) = 3(7)^2 - 12(7) - 36 = -27$	+	Creciente

Puntos de inflexión

Concavidad
Si una curva está por encima de sus rectas tangentes, entonces es cóncava hacia arriba (+).

f(x) es cóncava hacia arriba en x = b, si f''(b) > 0

Si una curva está por debajo de sus rectas tangentes, entonces es cóncava hacia abajo (-).

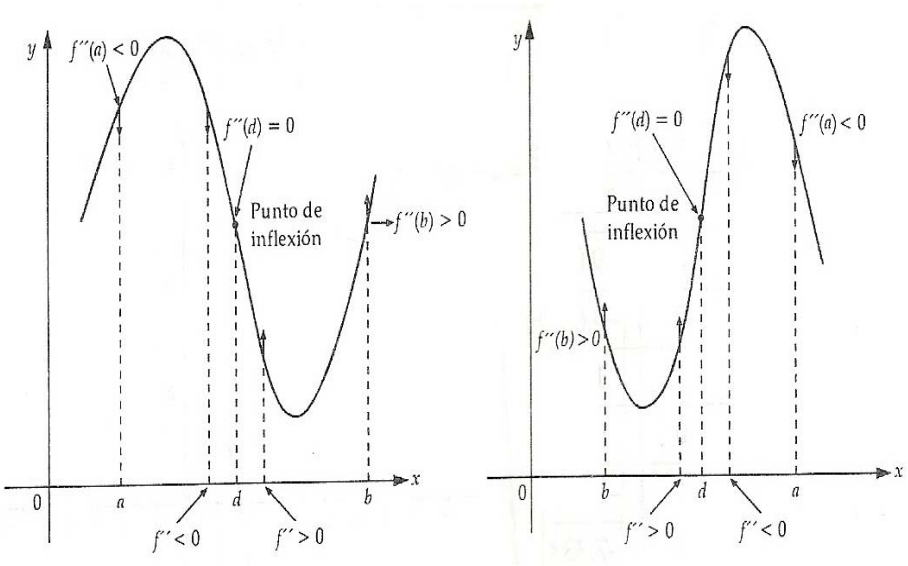
f(x) es cóncava hacia abajo en x = a, si f''(a) < 0

4.1.3 PUNTO DE INFLEXIÓN.

Son los puntos donde cambia el sentido de la concavidad de una función.

Con los puntos de inflexión podemos determinar los intervalos de prueba para determinar si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo en cada una de ellas.

Los pasos a seguir para determinar la concavidad de una función f(x) son:



1. Determinar la segunda derivada f''(x).
2. Igualar a cero f''(x) = 0.
3. Resolver la ecuación resultante.
4. Determinar los intervalos de prueba utilizando los valores de x, obtenidos en el paso anterior.
5. Hallar el signo de f''(x) en cada intervalo. Si f''(x) es positiva en un intervalo, entonces f(x) es cóncava hacia arriba, y si f''(x) es negativa, es cóncava hacia abajo.

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 1$ encuentra:

a) Los puntos de inflexión.
b) Los intervalos donde es cóncava hacia arriba.
c) Los intervalos donde es cóncava hacia abajo.

Paso 1 Determina la segunda derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 18x$$
$$f'(x) = 6x - 18$$

Paso 2 Igualando la segunda derivada a cero tenemos que:

$$6x - 18 = 0$$

Paso 3 Resolver la ecuación anterior:

$$6x - 18 = 0$$
$$6x = 18$$
$$x = \frac{18}{6} = 3$$

Por lo tanto, el único **punto de inflexión** tiene un valor de x = 3

Para realizar el siguiente paso, es necesario realizar la recta numérica para obtener los intervalos y números de prueba.

Intervalo de prueba	Numero de prueba	**Evaluación y Signo de** $f''(x) = 6x - 18$	Conclusión
$(-\infty,3)$	0	$f''(0) = 6(0) - 18 < 0$ (-)	Cóncava hacia abajo
$(3,\infty)$	4	$f''(4) = 6(4) - 18 > 0$ (+)	Cóncava hacia arriba

Por lo tanto:

$(-\infty,3)$ Cóncava hacia abajo
$(3,\infty)$ Cóncava hacia arriba

INSTRUCCIONES: Determina lo que se indica en cada uno de los siguientes ejercicios.

1.- $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

a) Los puntos críticos de la función.

b) Los puntos máximos y mínimos de la función.

c) Los intervalos de x donde la función es creciente y donde es decreciente.

d) El punto de inflexión.

e) El intervalo de x donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

2.- $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 1$

a) Los puntos críticos de la función.

b) Los puntos máximos y mínimos de la función.

c) Los intervalos de x donde la función es creciente y donde es decreciente.

d) El punto de inflexión

e) El intervalo de x donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

3.- $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 9$

a) Los puntos críticos de la función.

b) Los puntos máximos y mínimos de la función.

c) Los intervalos de x donde la función es creciente y donde es decreciente.

d) El punto de inflexión.

e) El intervalo de x donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

4.- $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 14$

a) Los puntos críticos de la función.

b) Los puntos máximos y mínimos de la función.

c) Los intervalos de x donde la función es creciente y donde es decreciente.

d) El punto de inflexión.

e) El intervalo de x donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

COMPETENCIAS GENÉRICAS

Las competencias genéricas son aquellas que todos los bachilleres deben estar en la capacidad de desempeñar; éstas les permitirán a los estudiantes comprender su entorno (local, regional, nacional o internacional) e influir en él, contar con herramientas básicas para continuar aprendiendo a lo largo de la vida, y practicar una convivencia adecuada en sus ámbitos social, profesional, familiar, etc., por lo anterior estas competencias construyen el Perfil del Egresado del Sistema Nacional de Bachillerato.

A continuación se enlistan las competencias genéricas:

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. Elige y practica estilos de vida saludables.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS DEL CAMPO DE LA MATEMÁTICAS	BLOQUE DE APRENDIZAJE							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	X	X	X	X	X	X	X	X
Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.	X	X	X	X			X	X
Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	X	X	X	X		X	X	X
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y comunicación.			X	X	X	X	X	X
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	X	X	X	X	X	X	X	X
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.	X		X				X	X
Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.			X				X	
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	X	X	X	X	X		X	X

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

- Establece**,** a partir de los diferentes teoremas, los valores máximos y mínimos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las concavidades y los posibles puntos de inflexión de una función para aplicarlos en el trazado de su gráfica.
- Analiza el comportamiento de las funciones por medio del cálculo diferencial y calcula sus extremos relativos los que tienen aplicación en problemas reales.
- Desarrolla habilidades para interpretar el comportamiento de funciones de acuerdo a su análisis por medio de las derivadas.

4.2 PROBLEMAS DE OPTIMIZACION.

1.) Hallar dos números cuya suma es 18, sabiendo que el producto de uno por el cuadrado el otro es máximo.

Según el enunciado $x + y = 18$ y $x \cdot y^2 = Máximo$

Despejemos una en la primera ecuación y su valor lo llevamos a la ecuación del máximo.

$y = 18 - x$; $Máximo = x\,(18 - x)^2 \Rightarrow M(x) = x\,(18 - x)^2$,

En esta ecuación hallamos el valor de x que la hace máxima.

A.- Hallar la primera derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante.

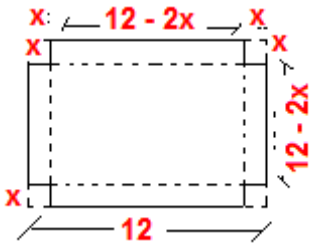
$M'(x) = (18 - x)^2 - 2x(18 - x) \Rightarrow M'(x) = 3(x - 18)(x - 6)$

Si: $M'(x) = 0 \Rightarrow -3(18 - x)(x - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 18 : x_2 = 6$ (v.c)

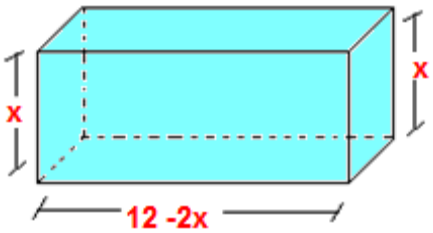
B.- Calculamos la segunda derivada y hallamos su valor numérico para las raíces anteriores.

$M''(x) = 6(x - 12) \Rightarrow M''(6) = -36 < 0 \Rightarrow \exists$ *máximo*; $M''(18) = 36 > 0 \exists$ *mínimo* si $x = 6 \Rightarrow y = 12$

2) Se dispone de una lámina de cartón cuadrada de 12 cm. de lado. Cortando cuadrados iguales en las esquinas se construye una caja abierta doblando los laterales. Hallar las dimensiones de los cuadros cortados para que el volumen sea máximo.



Volumen de



la caja = $v = (12 - 2x)(12 - 2x)(x) \Rightarrow v = x(12 - 2x)^2$

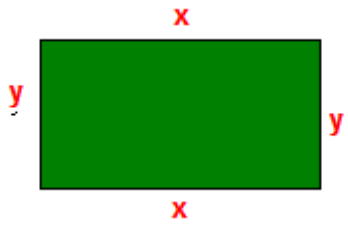
$v(x) = x(12 - 2x)^2 \Rightarrow v'(x) = 12(x - 2)(x - 6)$

si: $v'(x) = 0 \Rightarrow 12(x - 2)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 2;\ x = 6$ (v.c.)

$v''(x) = 24(x - 4) \Rightarrow v''(2) = 48 < 0 \exists$ máximo; $v''(6) = 48 \exists$ mínimo

NOTA: Por la naturaleza del problema, se ve que x no puede valer 6 cm. Porque el volumen sería 0, por lo tanto *x = 2 cm*.

3) ¿Cuál será la forma rectangular de un campo de área dada igual a 36 *Dm*2 **para que sea cercado por una valla de longitud mínima?**



Según el enunciado, área = $x \cdot y$; $x \cdot y = 36$ Mínimo = $2x + 2y$; $Min = 2x + 2y$

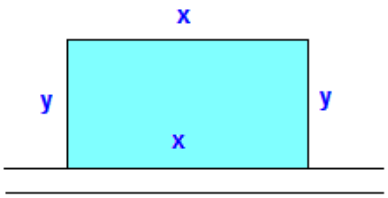
Despejamos y en la primera ecuación y su valor lo llevamos a la ecuación del mínimo.

$$y = \frac{36}{x} \Rightarrow Min(x) = 2x + 2\left(\frac{36}{x}\right) = \frac{2x^2 + 72}{x} \Rightarrow Min(x) = \frac{2x^2 + 72}{x}$$

$$Min'(x) = \frac{2x^2 - 72}{x^2};\ si: Min'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 72}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \ \ 6(v.c.)$$

$$Min''(x) = \frac{144}{x^3} \Rightarrow Min''(6) = \tfrac{2}{3} > 0 \Rightarrow \exists mín\ (nota:\ no\ se\ toma\ en\ cuenta\ x = -6)$$

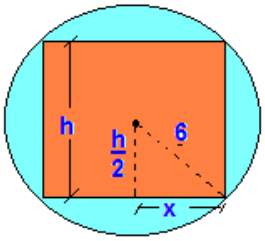
4) Se quiere cercar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado que está junto al camino cuesta BF. 8 el metro y para los lados BF. 4 el metro, halla el área del mayor campo que puede cercarse con BF.1.440.



Según el enunciado, área = $x.\ y$

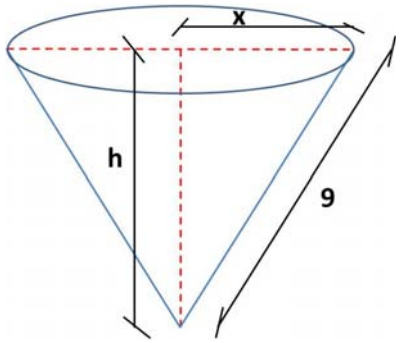
$8x + 4x + 4x + 4y = 1.440 \Rightarrow 12x + 8y = 1.440 \Rightarrow 3x + 2y = 360$

Despejando y en la segunda y llevando su valor al área, nos queda:



NOTA: Por la naturaleza del problema, no hace falta hallar la segunda derivada

5) Una esfera tiene un radio de 6 cm. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo inscrito en ella.



En la figura *x* es el radio de la base del cilindro. Por Pitágoras $6^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + x^2$.

Volumen $= \pi \ . x^2 \ . h \quad pero \quad x^2 = 36 - \frac{h^2}{4}$

$$V(h) = \pi\left(36 - \frac{h^2}{4}\right)h \Rightarrow V(h) = \frac{\pi\left(144h - h^3\right)}{4} \Rightarrow V'(h) = \frac{\pi}{4}\left(144 - 3h^2\right)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}\left(144 - 3h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{12}{\sqrt{3}} = \pm 4\sqrt{3};\ se\ toma: h = 4\sqrt{3}$$

NOTA: Por la naturaleza del problema, no hace falta hallar la segunda derivada

6) para hacer un filtro de laboratorio, se pliega un papel circular. Si el radio de dicho papel mide 9cm. Calcular la altura del cono que se forma para que el volumen sea máximo.

$$si: y = \frac{360 - 3x}{2} \Rightarrow A = xy \Rightarrow A(x) = x\left(\frac{360 - 3x}{2}\right) \Rightarrow A(x) = \frac{360x - 3x^2}{2}$$

$$A'(x) = \frac{360 - 6x}{2} \Rightarrow si:\ A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{360 - 6x}{2} = 0 \Rightarrow x = 60(v.c.)$$

$$y = \frac{360 - 3x}{2} \Rightarrow y = y = \frac{360 - 3(60)}{2} \Rightarrow y = 90\ m. \Rightarrow A = xy = (60\,m)(90m) = 5.400m^2$$

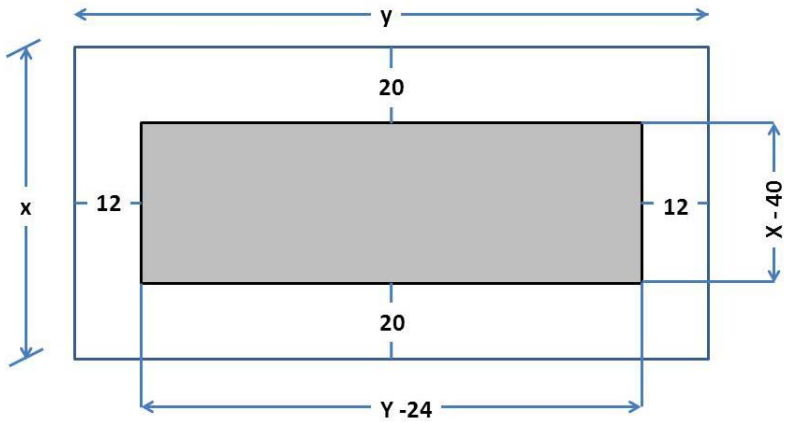
$$9^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 81 - h^2$$

$$v = \frac{\pi x^2 h}{3} \Rightarrow V(h) = \frac{\pi\left(81 - h^2\right)h}{3} \Rightarrow V(h) = \frac{\pi}{3}\left(81h - h^3\right)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(81 - 3h^2\right); si: V'(h) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}\left(81 - 3h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}cm$$

NOTA: Por la naturaleza del problema, no hace falta hallar la segunda derivada

7) Se dispone de una hoja de papel para un cartel que mide 2 m^2. Los márgenes superior inferior, miden 20 cm. Cada uno y los laterales 12 cm, cada uno. Hallar las dimensiones de las hojas, sabiendo que la parte impresa es máxima.



$$parte\,impresa: A = (x - 40)\ (y - 24); además\ \ área\,total: xy = 2 \Rightarrow x = \tfrac{2}{y}$$

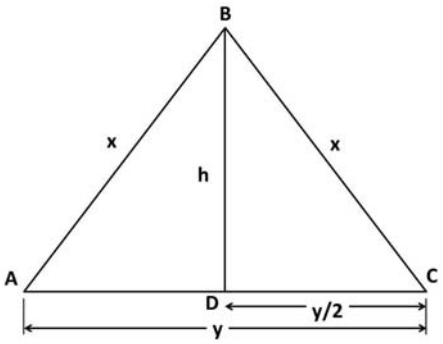
$$A(y) = \left(\tfrac{2}{y} - 40\right)(y - 24) \Rightarrow A(y) = (y - 24)\left(\frac{2 - 40y}{y}\right)$$

$$A'(y) = \left(\frac{2 - 40y}{y}\right) + (y - 24)\left(\frac{y(-40) - (2 - 40y)}{y^2}\right) \Rightarrow A'(y) = \frac{8(6 - 5y^2)}{y^2}$$

$$si: A'(y) = 0 \Rightarrow \frac{8(6 - 5y^2)}{y^2} = 0 \Rightarrow y = \pm\tfrac{\sqrt{30}}{5}(v.c.); y = 0 \nexists A'(y)$$

$$xy = 2 \Rightarrow x = \tfrac{2}{y} \Rightarrow x = \tfrac{10}{\sqrt{30}} \Rightarrow x = \tfrac{\sqrt{30}}{3}; y = \tfrac{\sqrt{30}}{5}$$

8) De todos los triángulos isósceles de 12 m de perímetro, hallar el de área máxima.



En la figura: área $= \frac{y.h}{2}$ por Pitágoras $\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2$; $x^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + h$

Perímetro: $2x + y = 12 \rightarrow y = 12 - 2x$

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}} \quad ; \quad Area = \frac{y \,.\, h}{2} \Rightarrow Area = \frac{y \cdot \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}}}{2}$$

$$si: \; y = 12 - 2x \; ; \; A(x) = \frac{(12-2x)\sqrt{x^2 - \frac{(12-2x)^2}{4}}}{2} = \frac{2(6-x) \quad \sqrt{\frac{4x^2 - 144 + 48x - 4x^2}{4}}}{2}$$

$$A(x) = (6-x)\frac{\sqrt{48x - 144}}{2} \Rightarrow A(x) = (6-x)\frac{\sqrt{48x(x-3)}}{2} \Rightarrow A(x) = (6-x)\frac{4\sqrt{3\,(x-3)}}{2} \Rightarrow$$

$$A(x) = 2\,(6-x)\,\sqrt{3\,(x-3)} \Rightarrow A'(x) = 2\left[-\,2\sqrt{3\,(x-3)} + \frac{(6-x)\sqrt{3\,(x-3)}\,(3)}{3(x-3)}\right]$$

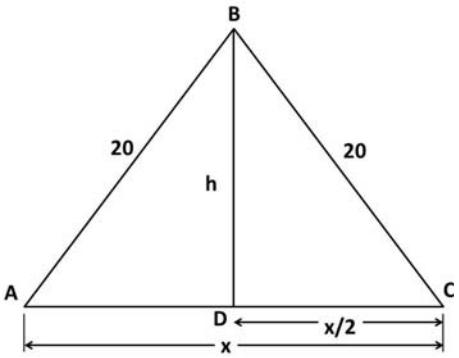
$$A'(x) = \frac{3\sqrt{3(4-x)}}{\sqrt{x-3}} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3(4-x)}}{\sqrt{x-3}} = 0 \Rightarrow x = 4(v.c.); x = 3 \nexists A'(x)$$

$$para \; x = 4 \Rightarrow y = 4$$

El triángulo de área máxima es equilátero de lado igual a 4cm.

NOTA: Por la naturaleza del problema, se ve que para *x* = *3*, el triángulo se transformaría en una recta, por lo tanto x = 4, es la solución.

9) En un triángulo isósceles, los lados iguales miden 20 cm. cada uno. Hallar la longitud de la base para que el área sea máxima.



$$en\ la\ \ figura: \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2;\ (20)^2 = h^2 + \left(\tfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}$$

$$Area: A = \frac{xh}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{400 - \frac{x^2}{4}}}{2} \Rightarrow A(x) = \frac{x\sqrt{1600 - x^2}}{4}$$

$$A'(x) = \frac{\sqrt{1600 - x^2} - \dfrac{x\,(-2x)}{2\sqrt{1600 - x^2}}}{4} \Rightarrow A'(x) = \frac{800 - x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}}$$

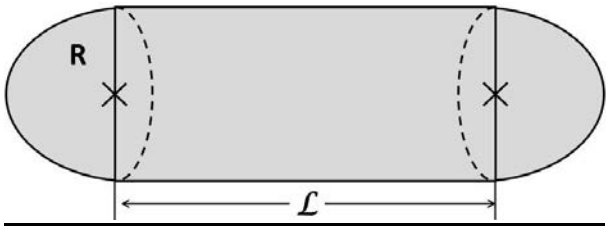
$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{800 - x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}} = 0 \frac{\left(800 - x^2\right)\sqrt{1600 - x^2}}{2\,(1600 - x^2)} =$$

$$Por\ lo\ \tan to: \quad 800 - x^2 = 0 \quad y \quad \sqrt{1600 - x^2} = 0;\ 800 - x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 20\sqrt{2}$$

$$\sqrt{1600 - x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 40$$

NOTA: Para la naturaleza del problema, para x = 40 el triángulo se transformarías en una recta, por lo tanto *x* = $20\sqrt{2}$ *m*.

10) Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10 π pies?



a Tenemos que A esfera = $4\pi R^2$; A. cilindro tapa = $2\pi R^2\ell$

b La función a optimizar es el costo: C = 2 ($4\pi R^2$) + $2\pi R^2\ell$

$$c) V.\ esfera = \frac{4}{3}\pi R^3;\ \ V.\ cilindro = \pi R^2\ell \Rightarrow V_{total} = \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2\ell \Rightarrow \ell = \frac{30 - 4R^3}{3R^2}$$

$$C(R) = 8\pi R^2 + 2\pi R\left(\frac{30-4R^3}{3R^2}\right) \Rightarrow C(R) = 8\pi R^2 + \frac{60\pi - 8\pi R^3}{3R}$$

$$C(R) = \frac{24\pi R^3 + 60\pi - 8\pi R^3}{3R} \Rightarrow C(R) = \frac{16\pi R^3 + 60\pi}{3R}$$

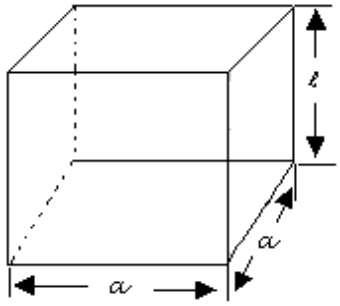
$$d)\ C'(R) = \frac{48\pi R^3(3R) - 3\left(16\pi R^3 + 60\pi\right)}{(3R)^2} \Rightarrow C'(R) = \frac{144\pi R^3 - 48\pi R^3 - 180\pi}{(3R)^2}$$

$$C'(R) = \frac{96\pi R^3 - 180\pi}{(3R)^2};\ si:\ C'(R) = 0 \Rightarrow \frac{96\pi R^3 - 180\pi}{(3R)^2} = 0 \Rightarrow 96\pi R^3 - 180\pi = 0 \Rightarrow R^3 = \frac{180\pi}{96\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{180}{96}} = \sqrt[3]{\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^5 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}\ ft$$

$$e)\ Si:\ R = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}\ ft \Rightarrow\ \ell = 2\sqrt[3]{15}\ ft$$

11) Para que un paquete pueda enviarse por correo es necesario que la suma de su longitud y el perímetro de su base no exceda de 108 pulgadas. Encuentre las dimensiones de la caja con base cuadrada de mayor volumen que se puede enviar por correo.



$El\ perímetro\ \ de\ la\ base\ es: P = 4a$

$Condición: \ell + 4a \le 108\ pu\lg, tomaremos\ el\ extremo\ máximo$

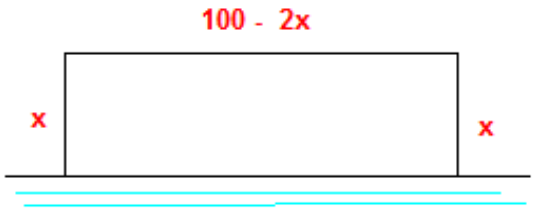
$\ell + 4a = 108, de\ donde\ \ell = 108 - 4a$

$El\ \ Volumen: V = aa\ell \Rightarrow V = a^2\ell \Rightarrow V = a^2(108-4a) \Rightarrow V(a) = 108a^2 - 4a^3$

$V'(a) = 215a - 12a^2; Si:\ \ V'(a) = 0 \Rightarrow 4a(54 - 3a) = 0 \Rightarrow a = 0\ no\ es\ solución,$

$54 - 3a = 0 \Rightarrow a = 18\ pu\lg \Rightarrow \ell = 108 - 4(18) \Rightarrow \ell = 36\ Pu\lg$

12) Un terreno rectangular se encuentra adyacente a un río y se debe cercar en 3 lados, ya que el lado que da al río no requiere cerca. Si se dispone de 100 m de cerca, encuentre las dimensiones del terreno con el área máxima.

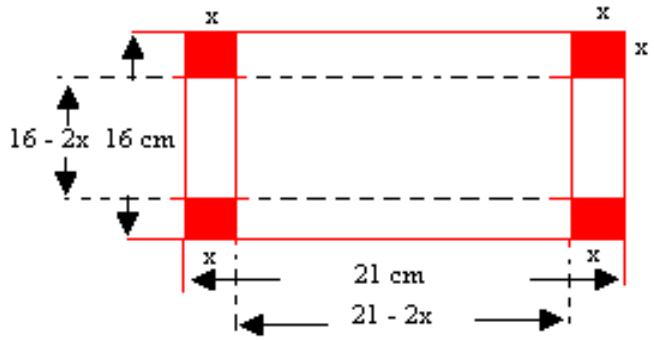


$0 < x < 50(condición);\ \ A = bh \Rightarrow A = x(100-2x) \Rightarrow A(x) = 100x - 2x^2$

$\frac{dA}{dx} = 100 - 4x \Rightarrow \frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25(v.c.)$

$\frac{d^2A}{dx^2} = -4 \Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} < 0 \Rightarrow en\ \ x = 25\ \exists\ máximo \Rightarrow x = h = 25m \Rightarrow b = 50m \Rightarrow A = 1250m^2$

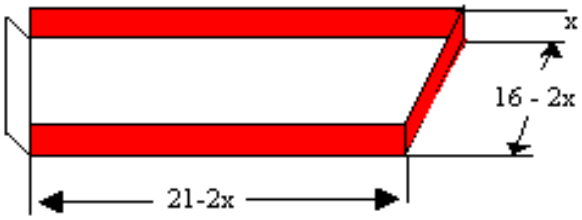
13) Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular de cartón de 16 c, de ancho y 21 cm de largo, recortando un cuadrado de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Calcular el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.



Sean: x = longitud en cm de los cuadrados que van a cortarse, V = Volumen en cm3

El volumen de una caja es el producto de sus dimensiones.

NOTA: x no puede ser negativa debido a que el ancho del cartón mide 16 cm no puede cortarse cuadrado cuyos lados midan 8 cm de largo.



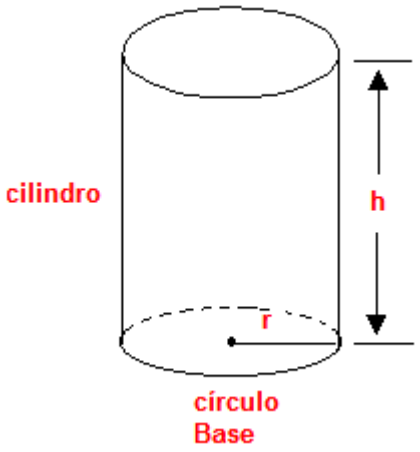
$$V = lah \Rightarrow v(x) = (21-2x)(16-2x)x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 74x^2 + 336$$

$$\frac{dv}{dx} = 12x^2 - 148x + 336 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4(3x-28)(x-3); si: \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow 4(3x-28)(x-3) = 0$$

$$x = 9; x = 3(v.c.)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = (24x-148) \Rightarrow \text{ sustituimos: } \frac{d^2v}{dx^2} = 24(3) - 148 < 0 \quad \exists \text{ máximo cuando } x = 3$$

14) Se desea elaborar un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa, que tenga un volumen de 24 π cm3, el material que se usa para la base cuesta tres veces más que el que se emplea para la parte cilíndrica. Suponiendo que en la construcción no se desperdicia material, evaluar las dimensiones para las que es mínimo el costo del material de fabricación.



Dónde: r = Radio de la base en (cm), h = la altura en (cm), V = 24 π cm3

Sustituyendo: 24 $\pi = r^2h$

$$h = \frac{24\pi}{\pi r^2} \rightarrow h = \frac{24}{r^2}$$

Para obtener la ecuación de Costo de Fabricación.

A = costo por cm^2 para la parte curva

El costo para la base $C_B = 3a(\pi r\, h)$

El costo para la parte cilíndrica:

$$C_C = a(2\pi r\, h)$$
$$C_C = a\ (área\ del\ cilindro)$$

$$El\ costo\ total\ C = C_B + C_C$$

$$C = 3a(\pi r^2) + a(2\pi rh) \Rightarrow C = a\pi(3r^2 + 2rh) \Rightarrow Como\ h = \tfrac{24}{r^2} \Rightarrow C(r) = a\pi\left[3r^2 + 2r\left(\tfrac{24}{r^2}\right)\right]$$

$$C(r) = a\pi\left[3r^2 + \left(\tfrac{48}{r}\right)\right] \Rightarrow \frac{dc}{dr} = a\pi\left(6r - \left(\tfrac{48}{r^2}\right)\right) \Rightarrow \frac{dc}{dr} = 6a\pi\left(\frac{r^3 - 8}{r^2}\right)$$

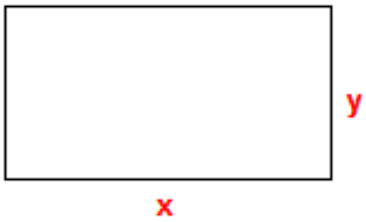
$$si: \frac{dc}{dr} = 0 \Rightarrow r^3 - 8 = 0 \Rightarrow r = 2(v.c.);\ si\ r = 0(no\ tiene\ sentido)$$

$$\frac{d^2c}{dr^2} = a\pi\left(6 + \left(\tfrac{96}{r^3}\right)\right) \Rightarrow sust.\ v.c.\ en: \frac{d^2c}{dr^2} = a\pi\left(6 + \left(\tfrac{96}{(2)^3}\right)\right) > 0 \Rightarrow en\ \ r = 2\ \exists\ mínimo$$

$$como\ h = \frac{24}{r^2} \Rightarrow h = 6$$

15) Un granjero dispone de 100 metros de valla, con los que desea construir un corral rectangular de la máxima superficie posible.

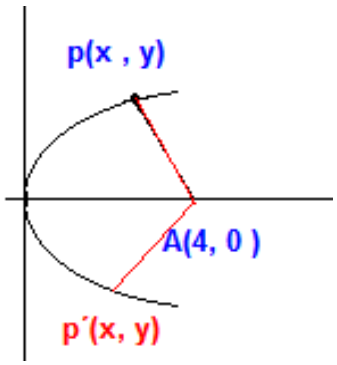
(Superficie del corral): *S = xy; del enunciado 2x + 2y = 100* $\Rightarrow$ *y = 50 – x* $\Rightarrow$ *S (x) = x(50 – x)*



$$\frac{ds}{dx} = 50 - 2x \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 0 \Rightarrow 50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25(v.c.)$$

$$\frac{d^2s}{dx^2} = -2 < 0 \Rightarrow en\ x = 25\ \exists\ máximo \Rightarrow y = 25 \therefore S.máxima\ es\ de: S = 625m^2$$

16) Calcular las coordenadas de los puntos de la parábola $y^2 = 4x$, **tales que sus distancias al punto A (4,0) sean mínimas.**



$$d(A,P) = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}\ \ y\ la\ parábola: y^2 = 4x \Rightarrow sust.en\ d\ porq\ el\ punto \in a\ la\ parábola$$

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (4x)^2} \Rightarrow d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}} \Rightarrow d'(x) = 0 \Rightarrow x = 2(v.c.)$$

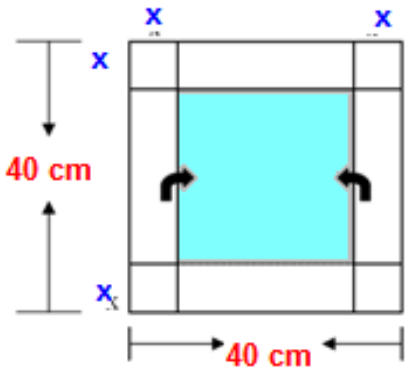
$$d''(x) = \frac{12}{\sqrt{(x^2 - 4x + 16)^3}} \Rightarrow sust.\ v.c.\ d''(x) = \frac{12}{\sqrt{((2)^2 - 4(2) + 16)^3}} > 0 \Rightarrow x = 2 \exists mínimo$$

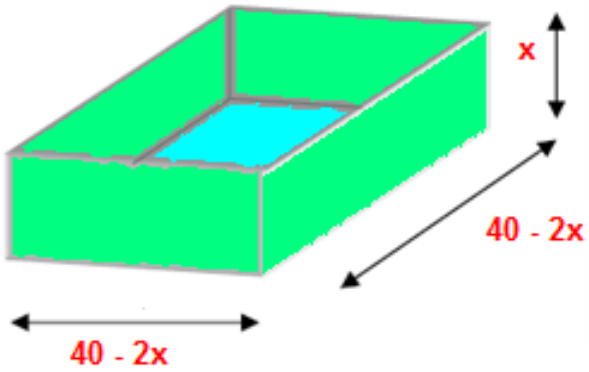
$$si\ x = 2 \Rightarrow y = \pm\ 2\sqrt{2}. \Rightarrow p\left(2, 2\sqrt{2}\right);\ p'\left(2, -2\sqrt{2}\right)$$

17) Se desean construir cajas de cartón sin tapa partiendo de cuadrados de lado 40 cm. a los que se les recortan las esquinas como indica la figura y doblando a lo largo de las líneas punteadas.

a) Determina la longitud x de los recortes para que el volumen de la caja sea máximo.

b) Determina el volumen máximo





$$\text{Base un cuadrado de lado: } (40-2x) \text{ y la altura } (x) \Rightarrow V(x)=(40-2x)^2 x; dom:[0,20]$$

$$\frac{dV}{dx}=2(40-2x)(-2)x+(40-2x)^2 \Big| \Rightarrow \frac{dV}{dx}=(40-2x)(-6x+40) \Rightarrow \frac{dV}{dx}=0 \Rightarrow x=20;\ x=\frac{20}{3}(v.c.)$$

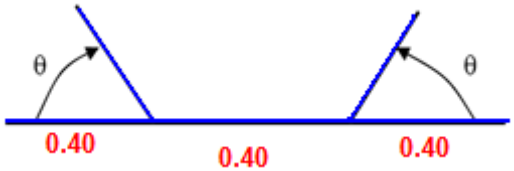
$$\frac{d^2V}{dx^2}=8(3x-40) \Rightarrow sust.\ v.c.\ \frac{d^2V}{dx^2}=8(3(\tfrac{20}{3})-40)=-160<0 \exists\ máximo$$

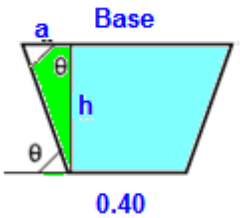
$$v_{máx}=\left(40-2(\tfrac{20}{3})\right)^2(\tfrac{20}{3}) \cong 4,74.10^3\, cm^3$$

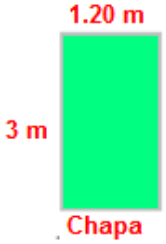
18) Se dispone de una chapa metálica de forma rectangular de 1,20 m x 3 m. Se desea construir con ella un bebedero para animales procediendo a doblar la chapa como indica la figura, para formar la superficie lateral y el fondo. Las bases se confeccionan de madera dura.

a) Determina el ángulo θ para que el volumen del bebedero sea máximo.

b) Calcula dicho volumen en litros.







a.) Superficie del trapecio base es : $S=\dfrac{0.40+(0.40+2a)}{2}h$

De la fig. $sen\theta=\dfrac{h}{0.40}\Rightarrow h=(0.40)sen\theta;\ \cos\theta=\dfrac{a}{0.40}\Rightarrow a=0.40\ \cos\theta$

$\Rightarrow sust.\ S(\theta)=\dfrac{0.40+(0.40+0.80\cos\theta)}{2}(0.40\ sen\theta)\Rightarrow S(\theta)=(0.16+0.16\cos\theta)sen\theta$

Sea : *V volumen del bebedero* $\Rightarrow V=SL\Rightarrow$ *pero* : $L=3m\Rightarrow$

$V(\theta)=3(0.16+0.16\cos\theta)sen\theta\left(m^3\right);Para: 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{dV}{d\theta}=3\left\lfloor -0.16\ sen^2\theta+(0.16+0.16\ \cos\theta)\cos\theta\right\rfloor\Rightarrow\dfrac{dV}{d\theta}=3(0.16)\left\lfloor -sen^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta\right\rfloor$

$\dfrac{dV}{d\theta}=0.48\left(2\cos^2\theta+\cos^2\theta-1\right)si\ \ \dfrac{dV}{d\theta}=0\Rightarrow 2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{4}$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=Arc\cos\left(\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}(v.c.)\ en\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{d^2V}{d\theta^2}=\dfrac{-12sen\theta(4\cos\theta+1)}{25}\Rightarrow sust\ v.c.\Rightarrow\dfrac{d^2V}{d\theta^2}=\dfrac{-12sen(\frac{\pi}{3})(4\cos(\frac{\pi}{3})+1)}{25}=\dfrac{-18\sqrt{3}}{25}<0$

$\Rightarrow\exists máximo\ en\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$

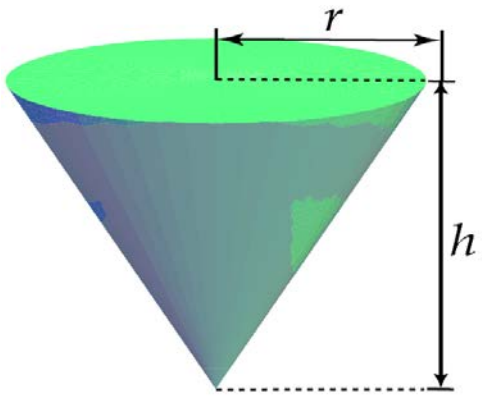
b.) $V\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3\left(0.16+0.16\ \cos\dfrac{\pi}{3}\right)sen\dfrac{\pi}{3}\cong 0.623m^3\cong 623\ lt.$

4.3 PROBLEMAS DE RAZÓN DE CAMBIO RELACIONADAS.

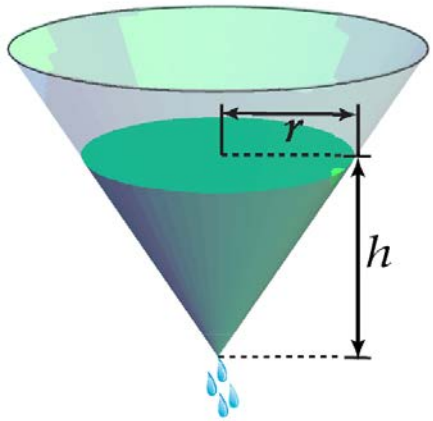
Otra aplicación importante de lo anterior es el cálculo de razones de cambio de dos o más variables que cambian con el tiempo; o sea, *¿qué tan rápido varia una cantidad en el tiempo?*

Por ejemplo, suponga que se tiene un recipiente cónico con agua, como el que se muestra en la figura. Cuando el agua sale del recipiente, el *volumen V*, el *radio r* y la *altura h* del nivel del agua son, las tres, funciones que dependen del tiempo *t*.

Recipiente lleno



Recipiente vaciándose



Estas tres variables están relacionadas entre sí, por la ecuación del volumen del cono; a saber:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad (*)$$

Por otra parte, derivando implícitamente ambos lados de (*) respecto del tiempo *t*, se obtiene la siguiente ecuación de razones relacionadas:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left[2\,r\,h\,\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right]$$

Se puede observar que la razón de cambio del volumen, está ligada a las razones de cambio de la altura y del radio, en donde:

dV .

$\frac{dt}{}$ es la razón o rapidez a la cual varia el volumen con respecto al tiempo

$\frac{dr}{dt}$ es la razón o rapidez a la cual varia el radio con respecto al tiempo

$\frac{dh}{dt}$ es la razón o rapidez a la cual varia la altura con respecto al tiempo

Así por ejemplo: dV / dt = 10 m^3/seg, significa que el volumen está aumentando 10m^3 cada segundo; mientras que, dV / dt = - 10 m^3/seg, significa que el volumen está disminuyendo 10m^3 cada segundo.

Ejemplo 2.-

Una escalera de 25 pies reposa sobre una pared vertical. Si la base de la escalera resbala y se aleja de la base de la pared a 3 pies/s, ¿qué tan rápido baja la parte superior de la escalera cuando la base de la misma está a 7 pies de la pared?

Solución:

Sea *x* la distancia de la base de la escalera a la base de la pared, y sea *y* la distancia de la parte superior de la escalera a la base de la pared. Como la base de la escalera se aleja de la base de la pared a una razón de 3 pies/s, $dx/dt = 3$. Se tiene así que hallar dy/dt cuando $x=7$. Por el teorema de Pitágoras

$x^2 + y^2 = (25)^2 = 625$

Esta es la relación entre *x* y *y*. Derivando ambos lados respecto a t, se obtiene:

$2x\, dx/dt + 2y\, dy/dt = 0$

Como $dx/dt = 3$, $6x + 2y\, dy/dt = 0$, donde

$3x + y\, dy/dt = 0$

Esta es la ecuación deseada para dy/dt. Ahora, para este problema en particular, $x=7$. Al sustituir *x* por *7* en la ecuación 1 se tiene:

$49 + y^2 = 645, \quad y^2 = 576$,

En la ecuación 2, al remplazar *x* y *y* por *7* y *24*, se obtiene: $21 + 24\, dy/dt = 0$

Por tanto, $dy/dt = -7/8$ pies/s. Como $dy/dt < 0$, se concluye que la parte superior de la escalera resbala por la pared a una razón de 7/8 pies/s, cuando la base de la escalera está a 7 pies de la pared.

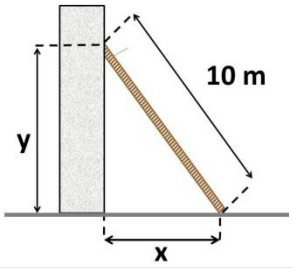
De acuerdo con lo expuesto anteriormente, en todo problema de *razones relacionadas* (o *tasas relacionadas*), se calcula la rapidez con que cambia una cantidad en términos de la razón de cambio de otra(s) cantidad(es).

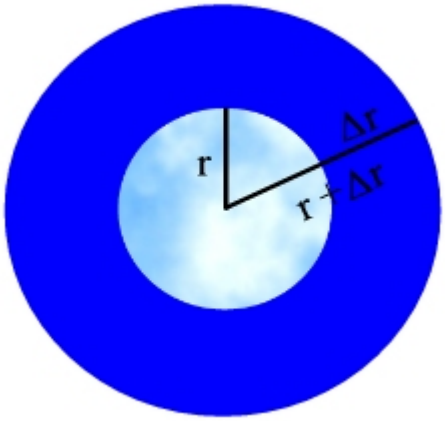
Estrategia para resolver problemas de razones relacionadas.

1) De ser posible, *trazar un diagrama* que ilustre la situación planteada.
2) Designar con símbolos todas las *cantidades dadas* y las *cantidades por determinar* que varían con el tiempo.
3) Analizar el enunciado del problema y distinguir cuales *razones* de cambio se *conocen* y cuál es la *razón* de cambio que *se requiere*.
4) Plantear una *ecuación que relacione las variables* cuyas razones de cambio están dadas o han de determinarse.
5) Usando la regla de la cadena, derivar implícitamente ambos miembros de la ecuación obtenida en (4), con respecto al tiempo *t*, con el ¯n de obtener la *ecuación de razones relacionadas*.
6) *Sustituir en la ecuación resultante* del punto (5), todos *los valores conocidos* de las variables y sus razones de cambio, a ¯n de *deducir* (despejar) la *razón de cambio requerida*. (Nota: Es hasta en este momento, que se hacen las sustituciones de acuerdo con los datos del problema).

Ejemplos aplicando las estrategias de razones.

3. Una escalera de 10m de longitud está apoyada contra un muro vertical. Si su base se empuja horizontalmente lejos de la pared a 2 m/s, ¿cuál será la rapidez con la que resbalará la parte superior de la escalera cuando la base esté a 4m del muro?

	(1) Lo primero que debemos de hacer es un dibujo para representar el texto, incluyendo de ser posible todas las variables que vayamos a necesitar durante el proceso.
t: tiempo transcurrido desde que inicia el movimiento. **x**: distancia de la base al muro a los t segundos. **y:** distancia del suelo a la parte superior de la escalera a los t segundos.	(2) En la imagen incluimos dos variables que nos serán de gran ayuda en la solución del problema. Sin embargo debemos tomar en consideración una tercera variable que es el tiempo.
$\frac{dx}{dt} = 2$	(3) Iniciamos la interpretación del texto... Como la escalera se empuja a una razón 2m/s, entonces la variación de x con respecto a t debe ser 2.
$y^2 = 100 - x^2$	(4) Debemos relacionar las variables x e y, esto lo podemos hacer a través del teorema de Pitágoras.
$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$	(5) Usamos la diferenciación implícita sobre la fórmula expuesta en el punto 4.
$y^2 = 100 - 16$ $y = 9.17$	(6) La situación que estamos analizando es cuando la escalera se encuentra a 4m del muro, por tanto evaluamos en la relación 4 y tenemos el valor de "y".
$18.34\frac{dy}{dt} = -8\ (2)$	(7) Sustituyendo los resultados en 3, 4 y 6 en la expresión 5.
$\frac{dy}{dt} = -0.87$	(8) Resolviendo para dy/dt tenemos la solución del problema, la rapidez con la que resbala la parte superior de la escalera cuando la base está a 4m del muro es de 0.87m/s

4. Una bola de nieve se forma de manera que su volumen aumenta a razón de 8 cm3/min. Calcula la rapidez con la que el radio aumenta cuando la bola de nieve tiene 10cm de diámetro.	
	(1) Lo primero que debemos de hacer es un dibujo para representar el texto, incluyendo de ser posible todas las variables que vayamos a necesitar durante el proceso.
t: tiempo transcurrido en el evento **r:** radio de la bola de nieve a los t segundos **V:** volumen de la bola de nieve a los t segundos.	(2) En la imagen incluimos la variable que nos serán de gran ayuda en la solución del problema. Sin embargo debemos tomar en consideración dos variables que son el tiempo y el volumen de la bola de nieve.
$\frac{dV}{dt} = 8$	(3) Iniciamos la interpretación del texto... Como la bola de nieve aumenta a razón de 8cm^3/min, entonces la variación de V con respecto a t debe ser 8.
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	(4) Debemos relacionar las variables V e y, esto lo podemos hacer a través de la fórmula del volumen de una esfera.
$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$	(5) Usamos la diferenciación implícita sobre la fórmula expuesta en el punto 4.
$V = \frac{4}{3}\pi(125)$ $V = 523.60$	(6) La situación que estamos analizando es cuando la bola de nieve tiene 10cm de diámetro, es decir su radio vale 5cm, por tanto evaluamos en la relación 4 y tenemos el valor de "V".

$523.60 = 4\pi$ ( ) dr	(7) Sustituyendo los resultados en 3, 4 y 6 en la expresión $\frac{dV}{dt} = 2500\,\pi \left(\frac{dh}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2500\pi}\left(\frac{dV}{dt}\right) \Rightarrow$
$\frac{dr}{dt}$	(8) Resolviendo para dr/dt tenemos la solución del $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2500\pi}(25) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi}\ dm/s \approx 0.032\ dm/s$ dio aumenta cuando tro es de 8.33cm/min

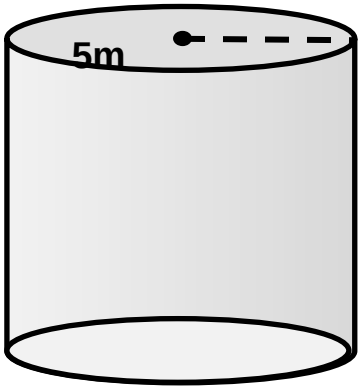
Ejemplo 5.-

A un depósito cilíndrico de base circular y 5 m de radio, le está entrando agua a razón de 25 litros por segundo. Calcular la rapidez a la que sube la superficie del agua.

¿Que se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando la altura de un cilindro circular de radio fijo, cuando su volumen aumenta a razón de 25 litros por segundo (25 *dm*3*/s*).

Es decir, si consideramos un cilindro circular que tiene un radio fijo *r* = 5*m*, altura *h* y volumen *V* entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) la altura *h,* cuando la razón de cambio del volumen *V* es de 25 dm^3/s. Esto es, se pide calcular a la derivada *dh/ dt* cuando *r* = 50 *dm* y *dV/ dt* = 25dm^3/s.

El volumen *V* de un cilindro circular de radio *r* y altura *h* es $V = \pi r^2 h$. Entonces cuando *r* = 50*dm*, el volumen del cilindro es $V = \pi (50)^2 h = 2500\pi h dm^3$.



Sabiendo que tanto la altura como el volumen son función del tiempo *t,* derivamos respecto a *t* y obtenemos

Por lo tanto, la rapidez con que sube la superficie del agua es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi}\ dm/s \approx 0.032\ dm/s$$

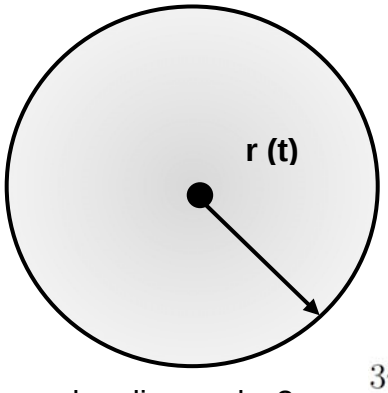
Ejemplo 6

Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3 metros, ´este aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm/s. ¿A qué rapidez (velocidad) aumenta el área del cırculo formado por dicha onda?

¿Que se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando el área de un cırculo, cuando su radio mide 3 *m* y la longitud de éste aumenta a razón de 0.5 *m/s*. Es decir, si consideramos un cırculo que (en cierto instante *t*) tiene un radio *r*(*t*) y un área *A*(*t*), entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) el área *A*(*t*), cuando el radio *r*(*t*) es de 3 *m* y la razón de cambio del radio es de 0.5 *m/s*. Esto es, se pide calcular a la derivada *dA/ dt* cuando *r* = 3 y *dr/dt = 0.5*

Como el área de cırculo es *A* = *πr*2 y la razón de cambio de *A* con respecto al tiempo *t* es

En el caso particular en que *r*(*t*) = 3*m* y 0.5 *m/s* se tiene que



$$\frac{dr}{dt}$$

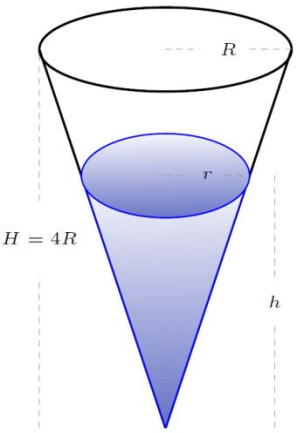
Esto $\frac{dA}{dt} = 2\pi r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right) = 2\pi(3\,m)(0.5\ m/s) =$ es en el preciso $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r(t)^2) = 2\pi r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right)$ instante (al transcurrir el *segundo*) en que el radio es de 3 *m*, $3\pi\,m^2/s \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 3\pi\,m^2/s \approx 9.4248\,m^2/s$ éste tiene un cambio de 0.5 *m* y el área tiene un cambio de $3\pi\,m^2/s\ \pi\ 9.4248 m^2/s$.

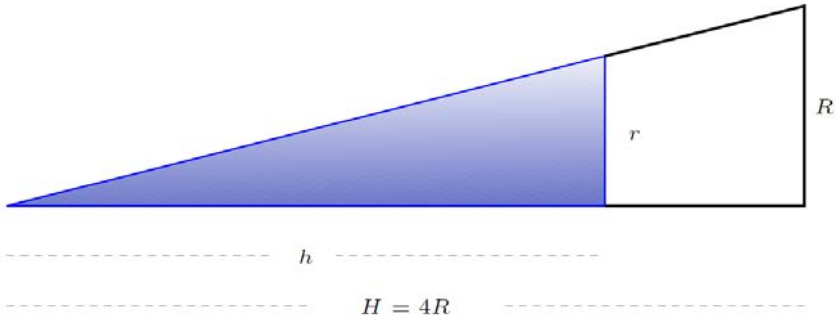
Ejemplo 7

Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente le está entrando agua a una rapidez constante por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de 1m la superficie sube a razón de 1cm por minuto. ¿A qué rapidez le está entrando agua al recipiente?

¿Que se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez a la que está aumentando el volumen del cono limitado por la superficie del agua, cuando la altura del mismo cono es de 1m y aumenta a razón de 1 cm/min. Es decir si consideramos un cono circular recto que tiene un radio r, una altura h y un volumen V entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) el volumen V, cuando la razón de cambio de la altura h es de 1 cm/min y h = 1m.

Esto es se pide calcular a la derivada *dV/dt* cuando *dh/ dt* = 1*cm/min* y *h* = 100*cm*





El volumen *V* del cono circular de radio *r* y altura *h* es

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Cuando la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro, por triángulos semejantes se cumple que:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{4R} \Rightarrow r = \frac{h}{4},$$

y el volumen es

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48}h^3$$

Considerando que tanto la altura como el volumen son función del tiempo *t,* derivamos respecto a *t* y obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48} 3h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16} h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right)$$

En el instante en que $h = 100cm = 10dm$ y $dh/dt = 1cm/min = 0.1\ dm/min$ se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{16} h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16} (10\,dm)^2 (0.1\,dm/min) = \frac{10\pi}{16}\ dm^3/min = \frac{5\pi}{8}\ dm^3/min$$

Por lo tanto, la rapidez con que entra el agua al recipiente es: $dV/dt = 5\pi/8$ litros/min ≈ 1.963 l/min, pues 1 litro = 1 dm^3.

BIBLIOFRAFÍA.

- *Barnett, R. (2000). Precálculo: funciones y gráficas (4ta ed.). México: McGraw Hill Interamericana.*
- Edwin J. Purcell (1992) Cálculo diferencial e integral (6ta ed.). Mexico: Prentice Hall.
- *Larson, R. (1996). Álgebra. México: Publicaciones Cultural.*
- *Leithold, L. (2000). Matemáticas previas al Cálculo (3ra ed.). México: Oup-Harla.*
- *Ortiz, F. (2005). Matemáticas IV. Bachillerato General. México: Publicaciones Cultural.*
- *Ruiz J. (2005). Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV. México: Publicaciones Cultural.*
- *Stewart, J. (2000). Precálculo. México: International Thomson Editores.*
- *Sullivan, M. (1997). Precálculo. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.*
- DE LA ROSA, L.G. (2009). *"Regla de los cuatro pasos"*, en Geometría dinámica 2009, en http://geogebra.geometriadinamica.org/4pasos.html, consultado en octubre de 2011.
- SOTO, E. (2010). "*Matemáticas*". En aprende matemáticas 2010, en www.aprendematematicas.org.mx, consultado en octubre de 2011.
- Ibáñez C. (2007), Matemáticas V Cálculo Diferencial México. Editorial Iberoamérica.
- Oteyza M. (2006), Conocimientos fundamentales cálculo diferencial e integral.
- México (UNAM) Editorial Pearson Educación.

Sitios en internet

- Programa de estudio, Matemáticas IV, SEP. http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_4osem/Matematicas-IV.pdf

- *Colegio de Matemáticas ENP* *http://prepa8.unam.mx/colegios/mate/pdf/m61unidad01.pdf*

- *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo* *http://dieumsnh.qfb.umich.mx/DIFERENCIAL/funciones.htm*

- http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Historia1.htm

- Programa de estudio, Matemáticas IV, SEP. http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_4osem/Matematicas-IV.pdf

- *Colegio de Matemáticas ENP* *http://prepa8.unam.mx/colegios/mate/pdf/m61unidad01.pdf*

- *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*
  http://dieumsnh.qfb.umich.mx/DIFERENCIAL/funciones.htm
- http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Historia1.htm
- *Barnett, R. (2000). Precálculo: funciones y gráficas (4ta ed.). México: McGraw Hill Interamericana.*
- Edwin J. Purcell (1992) Cálculo diferencial e integral (6ta ed.). Mexico: Prentice Hall.
- *Larson, R. (1996). Álgebra. México: Publicaciones Cultural.*
- *Leithold, L. (2000). Matemáticas previas al Cálculo (3ra ed.). México: Oup-Harla.*
- *Ortiz, F. (2005). Matemáticas IV. Bachillerato General. México: Publicaciones Cultural.*
- *Ruiz J. (2005). Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV. México: Publicaciones Cultural.*
- *Stewart, J. (2000). Precálculo. México: International Thomson Editores.*
- *Sullivan, M. (1997). Precálculo. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.*
- http://www.thomsonlearning.como.mx
- *Matebrunca*
- *http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Funciones/expo-log-aplicac.pdf*
- Programa de estudio, Matematicas IV,SEP.
- http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_4osem/Matematicas-IV.pdf
- Larson R. Cálculo, Hostetler, Edwards. Editorial, Mc Graw Hill. Sexta edición.
- Dennis G. Zill. Cálculo con geometría analítica, Editorial, Iberoamericana.
- Earl W. Swokowski. Cálculo con geometría analítica, Editorial, Iberoamericana. Segunda edición.
- *Leithold, L. (2000). Matemáticas previas al Cálculo (3ra ed.). México: Oup-Harla.*
- *Ortiz, F. (2005). Matemáticas IV. Bachillerato General. México: Publicaciones Cultural.*
- Programa de estudio, Matematicas IV,SEP.
  http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_4osem/Matematicas-IV.pdf